L'ECONOMIA MATEMATICA

Esposizione di V. PARETO

Dalla *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*
Tome I, vol. 4, fasc. 4 (1911)

INDICE

Il problema matematico . . . . . *Pag.* 333

1. Posizione della questione. — 2. Le funzioni di offerta e di domanda. — 3. Le funzioni indici. — 4. La pluralità delle funzioni indici. — 5. I punti termini. — 6. Cicli aperti e cicli chiusi. — 7. Il valore massimo degli indici. — 8. I vincoli. — 9. I vincoli di primo genere. — 10. I vincoli di secondo genere. — 11. I tipi dei fenomeni economici.

Corrispondenza fra il problema matematico e il problema economico . . » 345

12. Dati forniti dall'esperienza. — 13. I beni economici. — 14. Le funzioni indici. — 15. Misura del piacere. — 16. I caratteri delle linee di indifferenza. — 17. I caratteri degli indici di ofelimità. — 18. L'ofelimità. — 19. Corrispondenza fra gli indici di ofelimità e le curve di offerta e di domanda. — 20. Caso di un numero qualunque di merci. — 21. Forma lineare delle varietà di offerta e di domanda e consumi indipendenti. — 22. Funzioni indici corrispondenti a determinate curve di offerta e di domanda. — 23. Forma iperbolica delle curve di offerta e di domanda. — 24. Forme da provare per le curve di offerta e di domanda. — 25. I vincoli di primo genere. — 26. I vincoli di secondo genere. — 27. I tipi dei fenomeni economici. — 28. Il massimo di ofelimità per una collettività. — 29. Le trasformazioni. — 30. L'economia matematica non risolve direttamente casi pratici.

Determinazione dell'equilibrio economico , ... » 367

31. Scambio. Libera concorrenza e prezzi costanti. — 32. Leggi generali dell'offerta e della domanda. — 33. Consumi indipendenti. — 34. Variazioni dell'offerta e della domanda. — 35. Consumi dipendenti. — 36. Consumo di un gran numero di merci. — 37. Scambio. Prezzi variabili e differenti. — 38. Scambio. Prezzi costanti. Monopolio di un individuo e di una merce. — 39. Monopolio di due individui e di una merce. — 40. Monopolio di due individui e di due merci. — 41. Produzione. — 42. Notazioni. — 43. I vincoli. — 44. I costi di produzione. — 45. I tipi. — 46. Equilibrio della produzione nel caso più semplice. — 47. Capitalizzazione. — 48. La capitalizzazione sotto diversi punti di vista.

IL PROBLEMA MATEMATICO

1. *Posizione della questione.* — Come in tutti gli studi di applicazione della matematica, abbiamo nell'economia matematica due problemi distinti:

1° un problema esclusivamente matematico, che trae le conseguenze da taluni presupposti;

2° un problema di adattamento dei presupposti e delle conseguenze teoriche ai casi concreti della pratica.

È sopratutto del primo di tali problemi che ci occuperemo nel presente articolo.

Storicamente, il secondo problema precede di regola il primo. La teoria viene creata per risolvere casi pratici, e molto spesso poi, si enunciano in forma di teorema pratico le conclusioni di essa. Tale modo di ragionare è difettoso, o per lo meno eccessivo (1), ed ha condotto in economia politica a molte discussioni oziose. La maggior parte delle obbiezioni che sono state mosse alle teorie dell'economia matematica sono in realtà obbiezioni a certe applicazioni delle teorie stesse. Si è ragionato come ragionerebbero delle persone che, avendo constatato il sussistere di una certa differenza tra la superficie di un rettangolo concreto più o meno imperfetto, ed il prodotto della base del rettangolo per l'altezza, traessero da ciò la conclusione che il teorema di geometria che dà l'espressione dell'area del rettangolo è falso.

Il problema matematico che costituisce l'oggetto del nostro studio può essere enunciato così: date le leggi matematiche in base alle quali agiscono, in media, taluni esseri, determinare le conseguenze di esse.

Da un punto di vista strettamente teorico, la natura di queste leggi è presso che indifferente; ma è evidente che dobbiamo occuparci in particolare di quelle che, per astrazione, possono corrispondere più o meno bene a casi concreti.

Il nostro studio comprende una parte statica ed una parte dinamica; ci occuperemo quasi esclusivamente della prima.

Una posizione degli individui considerati sarà detta *posizione di equilibrio* se essa è tale che, in base alle leggi date, gli individui possano mantenervisi

(1) V. Pareto, *Manuel d'économie politique*, Paris 1909, pag. 1-39.

indefinitamente (1). Come in meccanica, vi saranno da considerare equilibrii stabili ed equilibrii instabili (2).

Quando un individuo agisce in modo da far aumentare una certa quantità x, diremo per brevità di locuzione, che egli si muove nel senso delle x positive. Quando passa per stadi successivi nei quali si trova in rapporto con delle quantità x, y legate dalla relazione:

[1] $$f(x, y) = 0$$

diremo che egli percorre il *cammino* o il *sentiero* dato da questa equazione. Si tratterà di una superficie nel caso di tre variabili, di una varietà di ordine n nel caso di n variabili.

Una posizione di equilibrio economico è quella in cui l'individuo rimane in riposo.

È possibile esporre le teorie dell'economia matematica senza fare esplicitamente uso della nozione di prezzo (3); il che può essere utile da un punto di vista didattico; ma la nozione di prezzo giova per evitare lungaggini, e conviene servirsene fin dal principio. Il *prezzo* di una merce X in termini di un'altra merce Y (4) è la quantità (5):

$$p = -\frac{dy}{dx}$$

x ed y essendo legate dall'equazione [1].

In generale, se si ha:

[2] $$f(x, y, z, \ldots) = 0$$

---

(1) V. PARETO, *Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale*, Milano 1906, pag. 150.

(2) L equilibrio economico presenta più di una analogia con l'equilibrio meccanico. Parecchie di queste analogie sono indicate nel *Cours d'économie politique* di V. PARETO (v. nota 1, pag. 337).

Nella prolusione tenuta all'Università di Roma per l'anno accademico 1901-1902, V. VOLTERRA ha segnalato l'analogia delle formule dell'equilibrio economico con le formule dedotte dal principio delle velocità virtuali.

(3) È ciò che V. PARETO fa in un capitolo del suo *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 3).

(4) L. WALRAS, *Éléments d'économie politique pure, ou Théorie de la richesse sociale* (3ª ediz.), Losanna 1896, pag. 71. Questo autore ha introdotto la nozione del prezzo di una merce in termini di un'altra, ma la sua definizione lascia a desiderare. Egli dice (pag. 71): « Chiamando genericamente *prezzi* i rapporti di scambio... »; e (pag. 66) « *Il valore di scambio* è la proprietà che alcune cose posseggono di non essere ottenute nè cedute gratuitamente, ma di essere acquistate o vendute, ricevute o date in determinate proporzioni di quantità contro altre cose ».

(5) Questa definizione ha il grave difetto di lasciar credere che il valore di scambio sia qualche cosa di oggettivo, una proprietà delle cose, come potrebbe essere il peso, la composizione chimica, ecc. È una reminiscenza delle entità metafisiche dell'antica

si porrà:

$$[3] \qquad p_y = -\frac{\partial x}{\partial y}, \quad p_z = -\frac{\partial x}{\partial z}, \ \ldots,$$

e p_y sarà il prezzo di Y in termini di X, p_z sarà il prezzo di Z in termini di X, ecc. In questo caso X è detto *moneta*.

Per accostarsi alla realtà conviene scegliere i valori in modo che i prezzi siano sempre positivi.

2. *Le funzioni di offerta e di domanda.* — Per determinare le azioni degli uomini, si può risalire più o meno lontano verso le loro origini. Se notiamo solamente ciò che accade in un dato mercato, abbiamo una semplice descrizione di tali azioni, ma non ancora una teoria. Se ammettiamo che taluni elementi possano variare, possiamo cercare di determinare gli effetti di queste variazioni sugli altri elementi. Ed abbiamo allora delle teorie economiche.

Gli economisti hanno incominciato col supporre che il prezzo di una merce variasse ed hanno cercato di rendersi conto delle variazioni subìte dalla quantità comperata o venduta della merce stessa. Hanno introdotto nella scienza due termini il cui significato è stato ben precisato soltanto dalla economia matematica.

Ad un dato prezzo p_y, un individuo vende la quantità $y_o - y$ della merce Y, e si dice che $y_o - y$ è la sua *offerta* di Y, y_o essendo la quantità iniziale di Y da lui posseduta.

Al prezzo p_z, egli acquista la quantità $z - z_o$ di Z; si dice che la quantità $z - z_o$ è la sua *domanda* di Z.

Se le merci sono in numero di n, i prezzi sono in numero di $n - 1$; e se supponiamo dati i prezzi, le n incognite x, y, z ..., sono determinate in funzione dei prezzi e dei propri valori iniziali, a mezzo di un sistema di n equazioni; per esempio:

$$[4] \qquad \begin{cases} f^{(1)}\,(x,\ y,\ \ldots,\ p_y,\ p_z,\ \ldots,\ x_o,\ y_o,\ \ldots) = 0 \\ f^{(2)}\,(x,\ y,\ \ldots,\ p_y,\ p_z,\ \ldots,\ x_o,\ y_o,\ \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}\,(x,\ y,\ \ldots,\ p_y,\ p_z,\ \ldots,\ x_o,\ y_o,\ \ldots) = 0. \end{cases}$$

Tutta l'economia classica può essere definita come: una serie di tentativi fatti per risolvere col linguaggio comune, senza far uso della matematica,

---

economia politica. Vedere a questo proposito: V. PARETO, *L'économie et la sociologie au point de vue scientifique*, « Rivista di Scienza », 1 (1907), n. 2.

W. STANLEY JEVONS, *The Theory of Political Economy* (2ª ediz.), Londra 1879 (3ª ediz.), Londra 1888, è molto più scientifico. Colpito dall'ambiguità del termine *valore*, egli propone di sostituirlo con l'altro *rate of exchange*.

La maniera in cui il termine valore è adoperato in un determinato lavoro è un buon segno diagnostico per distinguere la metafisica economica dalla scienza economica (cfr. V. PARETO, *Manuel d'économie politique* [v. nota 1, pag. 333], pag. 208).

questo sistema di equazioni, ed altri analoghi ad esso che si ottengono per la produzione (1). A tal fine, gli economisti classici hanno cercato, a mezzo di artifici più o meno plausibili, di ridurre il sistema ad una o due equazioni al più, essendo la soluzione di un sistema di questo genere il solo problema che potessero affrontare con le loro conoscenze matematiche. Si sono quindi sforzati di sostituire dovunque dei rapporti di causa ad effetto ai rapporti di mutua dipendenza dei fenomeni; e la loro influenza è stata tale che molti economisti matematici li hanno seguiti su questa via erronea.

Facendo variare nelle equazioni [4] il solo p_y, determineremo i valori di:

$$\frac{\partial y}{\partial p_y}, \quad \frac{\partial x}{\partial p_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial p_y}, \quad \dots$$

Gli economisti classici si sono generalmente occupati soltanto della prima di queste quantità, che ha fornito loro le leggi di ciò che essi chiamavano l'offerta e la domanda. Sembra che essi non si siano mai reso esatto conto del fatto espresso dall'equazione:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial p_y} dp_y + \frac{\partial y}{\partial p_z} dp_z + \dots;$$

e, quando lo hanno più o meno bene intravisto, lo hanno subito trascurato, perchè i mezzi di cui si servivano non permettevano loro di aggiungere questa equazione alle altre di cui già non erano in grado di tener conto.

Quando una merce Y è domandata, si può supporre:

$$y_o = 0,$$

ed è anzi ciò che generalmente si verifica; ma quando la merce è offerta, y_o deve essere una quantità positiva.

Incominciamo con l'esaminare il caso più semplice possibile: quello di due merci X, Y; la prima è offerta, ed x_o ne è la quantità iniziale; la seconda è domandata, e la quantità iniziale è nulla. Il prezzo di Y in termini di X è p (2).

La posizione iniziale dell'individuo è in A; $O\,A = x_o$. Egli si muove lungo una retta $A\,B$, inclinata di p sull'asse $O\,y$; o, in altri termini, effettua degli scambi di X in Y, a dei prezzi p costanti per porzioni successive; e continuerà finchè sarà arrivato ad un punto N, che può essere determinato mediante l'osservazione. Se, partendo sempre da A, diamo a p un altro valore, otterremo un altro punto N'; e potremo determinare in questo modo una certa linea $P\,Q$, sulla quale l'individuo si arresterà nei suoi scambi, quando parta

---

(1) V. PARETO, *Le nuove teorie economiche* («Giornale degli Economisti» [Roma], 1902, pag. 242 e seguenti).

(2) Problemi di questo genere sono stati trattati da F. Y. EDGEWORTH, *Mathematical Psychics*, Londra 1881, lavoro importante e notevole sotto molti aspetti, sopratutto per l'epoca in cui è stato scritto.

dal punto A. La chiameremo *curva di offerta e di domanda*. Facendo ora variare $x_o = O\,A$, otterremo altre curve (α) analoghe alla $P\,Q$, e potremo coprirne tutto lo spazio angolare $x\,O\,y$. Ciò fatto l'individuo può sparire; non abbiamo più bisogno di lui per determinare l'equilibrio economico; le curve (α) bastano allo scopo.

Questa conclusione sussisterebbe anche se l'individuo, invece che muoversi lungo rette, si movesse lungo le curve di una famiglia:

$$f(x,\ y,\ \mu) = 0;$$

si otterrebbero così altre linee analoghe, ma non identiche alle curve (α).

Partendo dal punto N, descriviamo la curva (β) inviluppo delle tangenti del tipo della $A\,N\,B$. Partendo da altri punti, avremo altre curve simili.

Agli effetti della determinazione dell'equilibrio, l'individuo può essere sostituito tanto dalle curve (β) quanto dalle curve (α).

Nel caso generale di un numero qualunque di variabili, si ottiene, invece delle curve (α), una varietà rappresentata da una equazione:

$$[5] \qquad F(x,\ y,\ \ldots,\ x_o,\ y_o,\ \ldots) = 0$$

la quale d'altra parte risulta dalla eliminazione delle p_x, p_y, ... fra le equazioni [4].

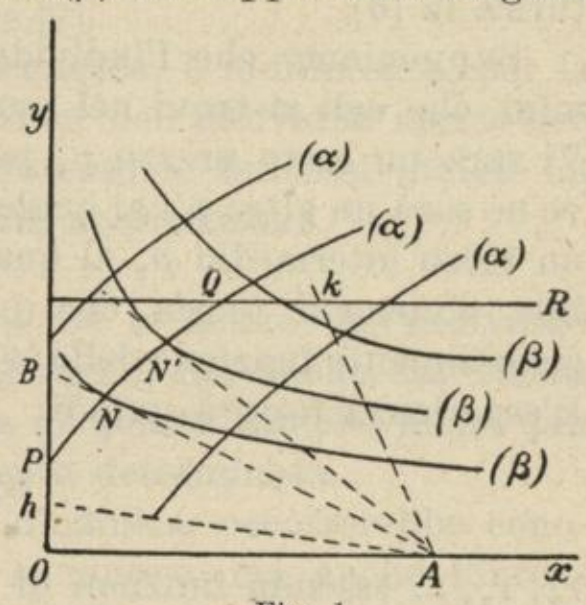

Fig. 1.

3. *Le funzioni indici* (1). — Le funzioni [5] possono essere fornite dall'esperienza; esse sono in numero eguale a quello dei valori di x_o, y_o, ... che debbono essere considerati. Alcuni economisti sembrano supporre che le funzioni [5] possano essere dedotte semplicemente dall'osservazione di un dato mercato; questo è un errore. L'osservazione di un mercato dato non può fornire che una delle funzioni [5]: quella corrispondente ai valori di x_o, y_o, ... che si verificano sul mercato stesso.

Eliminiamo fra le n equazioni [4] le $n-1$ quantità y_o, z_o, ..., e sostituiamo alle p le loro espressioni [3]; ne risulterà una equazione della forma:

$$f\left(x,\ y,\ \ldots,\ \frac{\partial x}{\partial y},\ \frac{\partial x}{\partial z},\ \ldots,\ x_o\right) = 0.$$

---

(1) Soltanto gradualmente, liberandoci dalle concezioni dell'antica economia politica, abbiamo sostituito la nozione di funzioni indici alla nozione di ofelimità. Questo concetto è ancora usato in modo esclusivo in V. PARETO, *Cours d'économie politique professé à l'Université de Lausanne*; 1, Losanna 1896; 2, Losanna 1897. Esso è sostituito dal concetto degli indici di ofelimità in V. PARETO, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), e diviene ancora più generale in V. PARETO, *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 659.

Integrando quest'equazione ed operando poi la differenziazione totale dell'integrale, si avrà:

$$[6] \qquad 0 = q_x\,dx + q_y\,dy + q_z\,dz + \ldots,$$

le quantità q_x, q_y, ... essendo funzioni di x, y, ... e di x_o.

L'equazione [6] non contiene più le quantità y_o, z_o, ..., e vedremo che in un caso molto ampio anche x_o scompare; l'equazione è quindi molto più semplice del sistema [4] che essa sostituisce. La semplificazione sarebbe illusoria se, per ottenere la [6], fosse necessario possedere il sistema [4]; ma non è così, e si può giungere, a mezzo dell'esperienza, ad una equazione che sostituisca la [6].

Supponiamo che l'individuo possegga le quantità x, y, ...; in altri termini, che egli si trovi nel punto x, y, ... Facciamo variare soltanto x ed y. Vi sarà un certo prezzo p'_y per il quale l'individuo acquisterà la merce Y; ve ne sarà un altro p''_y al quale egli venderà la merce stessa; ve ne sarà infine un terzo intermedio p_y al quale egli non acquisterà nè venderà. È concepibile, almeno in teoria, che questo prezzo possa essere determinato. Esso è generalmente funzione delle sole x, y, ... e non dei valori iniziali delle variabili. L'esperienza fornirà quindi:

$$p_y = r_y;\ p_z = r_z;\ \ldots$$

r_y, r_z, ... essendo funzioni di x, y, ... Avremo quindi l'equazione:

$$[7] \qquad 0 = dx + r_y\,dy + r_z\,dz + \ldots$$

equivalente alla [6]. Moltiplicando questa equazione per un fattore arbitrario avremo una infinità di equazioni [6]. E sarà in ogni caso:

$$\left(q_y + q_x\frac{\partial x}{\partial y}\right)dy = 0, \quad \left(q_z + q_x\frac{\partial x}{\partial z}\right)dz = 0, \ \ldots$$

Le q_x, q_y, ... godono della proprietà che l'individuo si arresta quando le espressioni precedenti si annullano. Esse possono essere indicate col nome di *funzioni indici elementari* e servono da indici dei movimenti dell'individuo.

Se l'equazione [7] ha un fattore integrante, e si indica con:

$$F(\varphi) = c$$

il suo integrale, F essendo una funzione arbitraria, si avrà:

$$[8] \qquad 0 = \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \ldots$$

dove φ_x è la derivata parziale di φ rispetto ad x, φ_y è la derivata parziale di φ rispetto ad y, ecc. L'equazione [8] sostituisce la [7] o la [6].

La funzione $F(\varphi)$ sarà detta *funzione indice.* Limitando un po' l'arbitrarietà nella scelta di F, si può fare in modo che la funzione indice goda le proprietà seguenti: che quando si dia ad esempio alla variabile indipendente y un incremento positivo dy, e si consideri il differenziale dF della funzione F che ne risulta, l'individuo si muova nel senso delle y positive nel caso che dF sia positivo; si muova in senso contrario nel caso che dF sia negativo; si arresti se $dF = 0$. La funzione F è così un indice dei movimenti dell'individuo.

Qualsiasi funzione che goda di queste proprietà potrà essere assunta come funzione indice. Abbiamo ottenuto l'equazione [7] e ne abbiamo dedotta una funzione indice; si può seguire il cammino inverso: trovare direttamente la funzione indice e dedurne l'equazione [7].

Da un punto di vista esclusivamente matematico, è indifferente, per la determinazione dell'equilibrio, conoscere le azioni dell'individuo attraverso le funzioni di offerta e domanda oppure attraverso le funzioni indici. La scelta dipende da considerazioni di opportunità sperimentale.

4. *La pluralità delle funzioni indici* (1). — Se le azioni dell'individuo dovessero essere determinate non soltanto dal segno, ma anche dal valore dell'incremento della funzione indice, la scelta di questa sarebbe molto più limitata, ed essa potrebbe essere completamente determinata.

Per trattare, ad esempio, un problema di dinamica, occorrerebbe conoscere non soltanto il senso in cui l'individuo si muove, ma anche l'intensità del movimento che corrisponde ad un dato valore dell'incremento della funzione indice. Ma per trattare le questioni di equilibrio, abbiamo bisogno soltanto di conoscere i valori delle variabili che annullano tali incrementi.

Anche nel caso dell'equilibrio, possono essere imposte alle funzioni indici delle condizioni accessorie; ed allora la scelta di esse diviene più o meno limitata. Torneremo su queste considerazioni. Ma per il momento, se alle funzioni indici chiediamo soltanto di determinare le condizioni dell'equilibrio, troviamo che, quando si parta dall'osservazione dell'equilibrio, la determinazione delle funzioni stesse non è univoca: trovata una funzione indice φ, se ne possono avere infinite altre della forma $F(\varphi)$.

5. *I punti termini.* — L'individuo che parte da A (vedi figura 1, pag. 337), qualora non trovi ostacoli sul suo cammino, non si ferma prima del punto N.

Ma accade spesso che intervengano altre condizioni che lo obbligano ad arrestarsi prima; si hanno cioè dei punti termini. Ad esempio, poichè la quan-

---

(1) A ragione i fondatori dell'economia pura hanno trascurato questa materia. Bisogna affrontare le difficoltà l'una dopo l'altra. Ma è ormai tempo di tener conto di questi caratteri delle funzioni indici.

tità x non può essere negativa, non è possibile prolungare la curva PQ al di là di P, e qualunque cammino del tipo Ah si arresta in h. Analogamente, se y non può oltrepassare un certo limite, qualsiasi cammino del tipo Ak si arresta in k. La linea di offerta e di domanda è quindi $OhPNQkR$. Si hanno in questo caso le linee di arresto OhP, QkR; si possono avere anche dei punti termini isolati.

Lo studio analitico che facciamo delle curve di offerta e di domanda deve estendersi esclusivamente al tratto al quale si riferiscono le funzioni indici.

6. *Cicli aperti e cicli chiusi.* — L'individuo parte da un punto x, y, ... e seguendo un cammino determinato, giunge ad un altro punto x', y',... Poichè tutte le variabili lungo tale cammino sono funzioni di una sola tra esse, l'espressione [6] è integrabile ed acquista un valore determinato passando dal primo punto al secondo. Come di consueto, se tale valore varia al variare del cammino seguito per passare dal primo punto al secondo, diremo che i cammini stessi costituiscono un ciclo aperto; si avrà invece un ciclo chiuso quando il valore rimanga invariato.

Dal punto di vista economico, se l'individuo fa uso delle quantità successive di x, y, ... che corrispondono ai punti del cammino percorso, i cicli aperti riguardano il caso in cui l'ordine nel quale le quantità sono impiegate influisce sul risultato ottenuto; i cicli chiusi riguardano invece il caso in cui tale ordine è indifferente. Quest'ultimo caso è il più importante perchè, con sufficiente generalità si può supporre che l'individuo scelga l'ordine che gli è più vantaggioso, il che determina il cammino da seguire, e lascia da parte la considerazione dei cicli aperti.

Nel caso che si abbiano funzioni indici del tipo $F(\varphi)$, i cicli sono necessariamente chiusi.

Quando si abbiano due sole variabili x, y, qualsiasi ciclo aperto può, agli effetti della determinazione dell'equilibrio, essere sostituito da un ciclo chiuso, poiche l'espressione:

$$q_x\,dx + q_y\,dy$$

ha sempre un fattore integrante. Viceversa, qualsiasi ciclo chiuso può, in queste condizioni, essere trasformato in un ciclo aperto.

7. *Il valore massimo degli indici.* — Le equazioni [6] sono soddisfatte quando la funzione indice passa per un massimo. L'equilibrio si verifica quindi in un punto in cui abbia luogo tale massimo (o minimo). La funzione indice può essere definita partendo da questa considerazione. Si tratterà allora di trovare una funzione tale che l'individuo si muova sempre nel senso in cui la funzione cresce, e finchè essa può crescere. Fra due combinazioni possibili delle quantità x, y, ... l'individuo sceglie sempre quella per cui la funzione indice ha valore maggiore.

Gli indici relativi ad individui diversi sono quantità eterogenee, e non si può pensare a sommarle, nè a trovare il massimo di una somma che non esiste.

8. *I vincoli* (1). — Consideriamo la collettività formata da un certo numero di individui che indicheremo con:

$$1, 2, \ldots n;$$

mentre indicheremo con:

$$x_i, y_i, \ldots$$

le quantità relative all'individuo i. Questa collettività costituisce un *sistema economico*. Le relazioni che vengono imposte fra le x, y, ... sono dette *vincoli* del sistema.

Se le equazioni di vincolo sono in numero eguale a quello delle variabili, tutto è determinato nel sistema senza bisogno di ricorrere alle funzioni indici. Il sistema è rigido.

Se non esistono vincoli, l'equilibrio è determinato soltanto dalle funzioni indici.

Questi due casi estremi non hanno alcuna importanza dal punto di vista dell'economia politica. I casi da studiare sono quelli in cui il numero delle equazioni di vincolo è inferiore al numero delle variabili. I vincoli del sistema consentono allora taluni movimenti che saranno detti compatibili coi vincoli stessi; e le funzioni indici determinano i punti in cui, con questi movimenti, si giunge ad una posizione di equilibrio.

Conviene domandare all'osservazione dei casi concreti quali siano, fra tutti i vincoli che si possono immaginare, quelli che debbono particolarmente interessarci.

Possiamo distinguere due generi di vincoli. Il primo è stato noto in tutti i tempi, anche agli economisti classici; il secondo è stato considerato soltanto di recente (2).

9. *I vincoli di primo genere.* — Questi vincoli consistono essenzialmente in equazioni tra i valori acquistati dalle variabili nel punto di equilibrio.

Indicheremo uniformemente questi valori con un indice 0 posto in alto. I valori iniziali saranno indicati con l'indice 0 posto in basso. Così x^0 indica il valore di x al punto di equilibrio, ed x_0 il valore iniziale di x.

I valori di alcune delle variabili x, y, ... crescono mentre i valori di altre variabili a, b, c, ... decrescono. Diremo che queste seconde quantità sono *trasformate* nelle prime.

---

(1) In V. Pareto, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 141-237, e in Id., *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 145-248, essi vengono chiamati *ostacoli:* e si dice che l'equilibrio deriva dal contrasto fra gusti ed ostacoli.

(2) V. Pareto, *Man. di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 171 e seguenti.

Sussistono, pei vincoli del primo genere, due gruppi di equazioni:

α) abbiamo per ciascun individuo una equazione:

[9] $$F_i(x_i^0,\ y_i^0,\ ...,\ a_i^0,\ ...) = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

che, come vedremo, rappresenta il *bilancio* (budjet) dell'individuo;

β) posto:

$$X = x_1 = x_2 + ..., \qquad A = a_1 + a_2 + ...,$$
$$Y = y_1 + y_2 + ..., \qquad B = b_1 + b_2 + ...,$$
$$. . . . . \qquad . . . . . .$$

il secondo gruppo consiste in equazioni fra X^0, Y^0, ..., A^0, ...,

[10] $$F(X^0,\ Y^0,\ ...) = 0, \quad ...$$

Questo gruppo di equazioni serve ad isolare la collettività che si vuol studiare dal resto del mondo economico. Si possono avere ad esempio, delle equazioni della forma:

[11] $$X^0 = X_0, \quad Y^0 = Y_0, \quad ...,$$

le quali indicano che le quantità totali rimangono costanti (caso dello *scambio*). Oppure si possono avere delle equazioni esprimenti che le trasformazioni di A, B, ..., in X, Y, ..., si effettuano senza che la collettività considerata riceva nulla dall'esterno e senza che essa fornisca nulla all'esterno (caso della *produzione*).

Se la collettività riceve qualche cosa dall'esterno o fornisce qualche cosa all'esterno, basta tener conto di ciò, e stabilire poi delle equazioni analoghe alle precedenti.

Vi sono infine delle equazioni che indicano se le quantità:

$$-A^0 + A_0, \quad -B^0 + B_0, \quad ...,$$

che scompaiono, sono integralmente trasformate nelle quantità:

$$X^0 - X_0, \quad Y^0 - Y_0, \quad ...,$$

o se si ha invece un residuo; e, in quest'ultimo caso, le condizioni alle quali esso deve soddisfare.

10. *I vincoli di secondo genere* (1). — Questi vincoli sono rappresentati da equazioni relative al cammino seguito per passare dalla posizione iniziale alla posizione di equilibrio; sono rappresentati cioè dalle operazioni necessarie a trasformare talune quantità in talune altre.

---

(1) Essi sono considerati in alcuni casi part colari dai fondatori dell'economia pura e in V. PARETO, *Cours d'économie politique* (v. nota 1, pag. 337). La teoria generale è esposta da V. PARETO, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334) ed è ulteriormente sviluppata in V. PARETO, *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333).

α) Per gli individui potrebbero essere date le equazioni dei cammini che essi devono percorrere. Ciò accade raramente. Più spesso sono date le equazioni di famiglie di curve fra le quali l'individuo può scegliere. Tali equazioni contengono dei parametri che si aggiungono al numero delle incognite da determinare per avere la posizione di equilibrio, e vengono così ad essere funzioni dei valori che le variabili acquistano in un punto di equilibrio.

Un caso importantissimo, ad esempio, è quello definito dalle equazioni seguenti:

$$[12] \qquad -\frac{\partial x_i}{\partial y_i} = p_y, \quad -\frac{\partial x_i}{\partial z_i} = p_z, \quad \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Le quantità p_y, p_z, ..., possono essere delle costanti (1); esse si identificano allora coi parametri ai quali abbiamo accennato. Possono essere anche funzioni delle variabili; ma, per il momento almeno, non sembra utile considerare questo caso in tutta la sua generalità. Conviene limitarsi a porre:

$$[13] \qquad -\frac{\partial x_i}{\partial y_i} = f_i(y_i), \quad -\frac{\partial x_i}{\partial z_i} = f_i(z_i), \quad \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

È bene mettere in evidenza che le equazioni [9] si deducono dalle [12] o dalle [13]. Dunque uno dei gruppi di vincoli del primo genere può essere dedotto dai vincoli del secondo genere; ma non può accadere il viceversa.

β) Per le trasformazioni si hanno generalmente equazioni della forma:

$$[14] \qquad \begin{cases} dA' = a_x\,dX + a_y\,dY + \ldots, \\ dB' = b_x\,dX + b_y\,dY + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A = A' + \alpha, \quad B = B' + \beta, \ \ldots \end{cases}$$

α, β, ... essendo i residui delle trasformazioni.

Le quantità:

$$a_x, \ a_y, \ \ldots, \ b_x, \quad \ldots,$$

vengono dette *coefficienti di fabbricazione* (2); questi possono essere costanti o variabili; possono essere dati direttamente o essere dedotti da certi sistemi di equazioni.

L'integrazione delle equazioni [14] può condurre a considerare cicli chiusi e cicli aperti.

Le quantità:

$$X, \ \ldots, \ A, \ \ldots,$$

possono scomporsi in altre per le quali varranno equazioni analoghe alle [14]. Talune di queste equazioni possono essere sostituite da equazioni di genere diverso fra le quantità trasformate. Noi ci limitiamo qui a considerare la questione in modo molto generale, senza entrare in troppi particolari.

---

(1) È solo caso studiato da L. Walras.

(2) Questa denominazione è dovuta a L. Walras, *Éléments d'économie politique pure* (v. nota 4, pag. 334), (2ª ediz.), Losanna 1889, pag. 231.

11. *I tipi dei fenomeni economici* (1). — Sia x una delle variabili che possono essere considerate come indipendenti; se esiste una funzione indice φ, si dovrà avere al punto di equilibrio:

[15] $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^0 = 0, \ \ldots$$

Dal punto di vista esclusivamente matematico si può distinguere il caso (I) in cui φ viene derivata supponendo costanti i parametri, dal caso (II) in cui la derivazione viene eseguita supponendo i parametri variabili. È la distinzione ben nota del calcolo delle variazioni. Nel caso (I) la derivazione viene effettuata lungo una curva avente il parametro in questione; nel caso (II) invece, la derivazione viene effettuata passando da una curva all'altra.

Dal punto di vista economico, un individuo al quale si riferisce l'equazione [15], che agisca secondo il tipo (I) dei fenomeni economici, prova le diverse curve corrispondenti a diversi parametri, finchè trova la curva voluta dalle condizioni dell'equilibrio. La derivazione viene effettuata supponendo il parametro costante, perchè l'individuo si occupa soltanto di trovarsi in equilibrio sulla curva corrispondente a tale parametro. Nel caso di fenomeni economici del tipo (II) invece, l'individuo vuole trovarsi in equilibrio quando passa da una curva all'altra; la derivazione deve dunque essere effettuata supponendo il parametro variabile.

Questa distinzione estremamente semplice ed elémentare dal punto di vista matematico, diviene più complicata da quello economico; ma da quest'ultimo punto di vista essa è fondamentale, ed è necessario comprenderla bene prima di procedere allo studio dell'economia matematica.

I valori x^0, y^0, ..., delle variabili al punto di equilibrio, non figurano esplicitamente nelle funzioni φ; essi vi figurano soltanto implicitamente perchè i parametri si esprimono in funzione dei valori medesimi; se dunque supponiamo i parametri costanti, e nelle funzioni φ sostituiamo alle variabili x, y, ..., i valori x^0, y^0, ..., avremo:

[16] $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \ \ldots$$

Ma queste equazioni non sussisterebbero più se, prima della derivazione si sostituissero ai parametri le loro espressioni in x^0, y^0, ..., e se essi fossero supposti variabili. Questa osservazione, tanto elementare dal punto di vista matematico, è stata spesso del tutto trascurata nelle considerazioni economiche; e ne sono derivati gravi errori.

---

(1) In V. Pareto, *Man. di economia politica* (v. nota 1, pag. 334) questo concetto generale e preciso è stato sostituito ai concetti di libera concorrenza, concorrenza perfetta e imperfetta, monopolio, ecc., che erano in uso e spesso mancavano di precisione.

CORRISPONDENZA FRA IL PROBLEMA MATEMATICO E IL PROBLEMA ECONOMICO (1)

12. *Dati forniti dall'esperienza.* — Siamo ora giunti al punto in cui bisogna domandare al fenomeno concreto una guida per continuare lo studio. Vediamo se l'esperienza può fornirci i dati che ci sono necessari. Non si tratta, almeno per il momento, di realizzare praticamente queste esperienze: ci basterà constatare la possibilità teorica di esse.

13. *I beni economici.* — Le variabili:

$$x,\ y,\ \ldots,\ a,\ b,\ \ldots,$$

rappresenteranno le quantità di alcune cose di cui gli uomini fanno uso. Indicheremo le cose stesse con:

$$X,\ Y,\ \ldots,\ A,\ B,\ \ldots.$$

Le $A, B, \ldots$, servono a procurarci, a *produrre* le $X, Y, \ldots$; esse si *trasformano* (2) in $X, Y, \ldots$.

Si potrebbe considerare obbligatorio il consumo delle $X, Y, \ldots$; ma per semplificare ad accostarsi alla realtà conviene considerarlo come facoltativo. Per le stesse ragioni, conviene supporre che il consumo abbia luogo nell'ordine che l'individuo preferisce. Ciò significa che, dal punto di vista dell'economia, la disposizione $x\ y$ è equivalente alla disposizione $y\ x$, in qnanto non si tiene conto dell'ordine.

L'economia studia soltanto fenomeni medi e spesso ripetuti. Conviene quindi interpretare:

$$x,\ y,\ \ldots,\ a,\ b,\ \ldots,$$

nel senso di quantità di cui si fa uso nell'unità di tempo; x, ad esempio, sarà la quantità di pane che un uomo consuma ogni giorno; a sarà la superficie di campo di cui gode ogni giorno, ecc.

Infine, alle variazioni discontinue che si presentano nella realtà, conviene, per semplicità di calcolo, sostituire delle variazioni continue (3). Si tratta

---

(1) Gli autori che hanno scritto di economia pura hanno spesso unito lo studio dei problemi teorici con quello dei problemi pratici. Questa mescolanza presenta gravi inconvenienti. Essa può, fino ad un certo punto, giustificare talune critiche che J. Bertrand muove a torto alle teorie dell'economia pura.

(2) Questa concezione generale di *trasformazione* è utile per l'esatta comprensione del fenomeno economico, cfr. V. Pareto, *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 175 e seguenti.

(3) Questa sostituzione ha dato luogo a molte obbiezioni contro le teorie dell'economia pura, obbiezioni che però hanno poco o punto valore.

semplicemente di una rappresentazione approssimata di fenomeni concreti, analoga a ciò che l'agrimensore fa quando segna sul suo piano il limite di un campo con una linea geometrica.

14. *Le funzioni indici.* — Vi sono casi molto semplici nei quali le funzioni indici si scoprono immediatamente. Ad esempio, un negoziante, un fabbricante, cercano di realizzare il profitto massimo. Se possediamo una espressione di tale profitto, essa potrà servire da funzione indice per conoscere il senso nel quale agiranno il negoziante e il fabbricante.

Supponiamo con A. COURNOT (1) che un individuo abbia il monopolio di una certa acqua minerale; la quantità che può venderne al prezzo p è $F(p)$; il guadagno dell'individuo sarà:

$$pF(p)$$

e per renderlo massimo, egli dovrà porre:

$$F(p) + pF'(p) = 0.$$

Questa equazione è analoga alla [8] e $pF(p)$ è analoga alla funzione indice φ.

Non vi è identità completa perchè:

1° in questo caso la variabile indipendente è non una quantità, ma un prezzo. Ciò è indifferente nel caso di due merci; ma nel caso di un numero più elevato di merci, non sarebbe lecito assumere soltanto i prezzi come variabili indipendenti;

2° la nozione di vincolo è stata confusa con quella di funzione indice.

Per trattare il *problema di* COURNOT secondo il metodo generale di V. PARETO, indichiamo con x la quantità di acqua minerale venduta dall'individuo avente il monopolio della vendita, con y la quantità di numerario che questa vendita produce. Si suppone che il prezzo sia costante per tutte le unità di acqua vendute; si ha in ciò un vincolo del secondo genere:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p,$$

---

(1) A. A. COURNOT, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Parigi 1838. Questa edizione originale è da lungo tempo introvabile in commercio. Ne esistono, una traduzione italiana: A. A. COURNOT, *Principii matematici della teoria della ricchezza*, Torino 1878 [Biblioteca dell'Economista (3), 2 (1878)]; e una traduzione inglese, A. A. COURNOT, *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth, translated by* N. T. BACON *with a bibliography of mathematical economics by* IRVING FISHER [Economic Classics edited by W. J. Ashley], New York 1897. In questa edizione il traduttore N. T. BACON ha corretto parecchi errori evidenti: « He has followed out the mathematical operation with great care, and in so doing discovered a surprisingly large number of errors. Most of these are misprints; others were due to obvious carelessness of the author, while still others are doubtful as to their origin. All have been corrected except two, which were the ones seriously affecting the argument », pag. VI e VII.

p essendo una costante, e l'equazione [9] diventa;

$$y^0 = p\, x^0.$$

Vi è poi un altro vincolo, che è del primo genere; esso consiste nel fatto che, ad un dato prezzo p, l'individuo che ha il monopolio della vendita, può vendere soltanto la quantità:

$$x^0 = F(p) = F\left(\frac{x^0}{y^0}\right).$$

La funzione indice è data semplicemente da y^0, che l'individuo avente il monopolio della vendita si sforza di rendere massimo. Dato un prezzo, l'individuo vende a questo prezzo tutta l'acqua che può, cioè continua a muoversi fino a raggiungere i valori x^0, y^0. Ma qui siamo in un caso del tipo (II) dei fenomeni economici: è l'individuo stesso che ha il monopolio, a stabilire il prezzo; derivando la funzione indice y^0 dobbiamo dunque, per trovare le condizioni di massimo, supporre p variabile; e poichè:

$$y^0 = pF(p),$$

ritroviamo l'equazione di COURNOT.

A. A. COURNOT ha assunto $pF(p)$ come funzione indice; sarebbe arrivato esattamente al medesimo risultato se avesse assunto $\mathfrak{F}[pF(p)]$, $\mathfrak{F}$ essendo una funzione arbitraria. Egli si è servito delle funzioni indici senza rendersene conto.

A. A. COURNOT (1) ha voluto estendere il suo metodo al caso della libera concorrenza, ma si è completamente sbagliato nelle deduzioni (2), e la con-

---

(1) *Principii matematici* (v. nota 1, pag. 346), pag. 116 e seguenti; *Researches* (vedi nota 1, pag. 346), pag. 79 e seguenti. Dopo aver considerato il caso in cui un solo individuo ha il monopolio della vendita, A. COURNOT considera il caso in cui due individui hanno tale monopolio, e quindi il caso in cui lo ha un numero qualunque di individui.

(2) J. BERTRAND [*Bull. Sc. math.* (2), 7 (1883), pag. 293-303] critica le teorie di A. A. COURNOT e di L. WALRAS, ma cade egli stesso in errori inspiegabili da parte di un geometra tanto eminente. La sola spiegazione possibile è che egli abbia redatto il suo articolo senza avere sott'occhio i libri degli autori che criticava e che la memoria lo abbia tradito.

A proposito del nostro problema, dopo aver notato che quando si trovassero l'uno di fronte all'altro due individui aventi il monopolio della vendita, il ribasso non dovrebbe aver limite, aggiunge, pag. 298: « Si les formules de A. A. COURNOT masquent ce résultat évident c'est que par une simple inadvertance, il y introduit, sous le nom de D et D', les quantités vendues par les deux concurrents, et que, les traitant comme des variables indépendantes, il suppose que, l'une venant à changer par la volonté de l'un des propriétaires, l'autre pourra rester constante ».

Le quantità che A. A. COURNOT designa qui con D e D' sono quelle stesse designate con D_1, D_2 nell'opera *Researches* citata alla nota 1, della pag. 346 e noi conserveremo questa notazione. Ora, è perfettamente evidente non solo che D_1, D_2 sono

siderazione degli indici dedotti dalle quantità che vengono scambiate a determinati prezzi è stata abbandonata in favore di un altro metodo di cui parleremo in seguito. Tuttavia, ragionando correttamente, possiamo,

---

appunto variabili indipendenti, ma anche che l'errore di A. A. Cournot sta appunto nel fatto di non averle trattate come tali.

In effetto A. A. Cournot suppone noto il prezzo p in funzione della quantità totale $D_1 + D_2$, cioè suppone che si abbia la sola equazione:

$$(\alpha) \qquad p = f(D_1 + D_2).$$

È quindi incontestabile che, avendosi una sola equazione nelle tre variabili p, D_1, D_2, due di queste possono essere considerate come variabili indipendenti, A. A. Cournot sceglie a tale scopo D_1 e D_2, ed a questa scelta non si può fare obbiezione alcuna. Egli osserva poi che i guadagni degli individui aventi il monopolio della vendita saranno rispettivamente:

$$(\beta) \qquad D_1 f(D_1 + D_2), \qquad D_2 f(D_1 + D_2).$$

Si propone di rendere massime queste due quantità, ed a tale scopo, se continuasse a trattare D_1 e D_2 come variabili indipendenti, dovrebbe annullare le due derivate parziali della prima quantità e le due derivate parziali della seconda; avrebbe così quattro equazioni che si riducono al sistema:

$$f(D_1 + D_2) = 0 \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = 0$$

oppure al sistema:

$$f(D_1 + D_2) = 0 \qquad f'(D_1 + D_2) = 0.$$

Il primo sistema non ha nessun rapporto col problema perchè indica che, anche ad un prezzo zero, non si vende nessuna quantità della merce. Il secondo sistema si compone di due equazioni che sono in generale incompatibili. D'altra parte esse non risolvono il problema di massimo, perchè la prima indica che il prezzo è nullo e che, per conseguenza, è nullo il guadagno del monopolista.

È forse questa prima equazione che ha indotto in errore J. Bertrand e gli ha fatto credere che il ribasso non avrebbe limite. Egli non ha tenuto conto del fatto che bisogna soddisfare anche alla seconda equazione.

In generale il prezzo non è, come suppone A. A. Cournot, funzione della somma $D_1 + D_2$; esso è funzione di D_1 e D_2. Si ha in ciò uno degli errori comunissimi, assai spesso ripetuti, anche da economisti matematici, ed imputabili al fatto della mancata considerazione della dipendenza dei fenomeni economici. Ora, quando si ha $p = f(D_1, D_2)$, e ci si propone di determinare un massimo comune delle espressioni:

$$D_1 f(D_1, D_2), \qquad D_2 f(D_1, D_2),$$

si ottiene:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial D_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial D_2} = 0.$$

Si hanno così tre equazioni per determinare le due incognite D_1, D_2. Il problema è dunque insolubile perchè troppo determinato. Notiamo, per incidenza, che la conclusione corretta è questa, e non quella immaginata da J. Bertrand, che il ribasso dei prezzi non abbia limiti.

Per eliminare la difficoltà che si presentava e risolvere tuttavia il suo problema, A. A. Cournot ne ha mutate le condizioni senza avvertire il lettore, e probabilmente

come abbiamo già fatto ai nn. 2 e 3, dedurre le funzioni indici dalla considerazione delle quantità scambiate a determinati prezzi (1).

15. *Misura del piacere.* — Se potessimo misurare il piacere prodotto dal consumo, o più generalmente dal possesso di una merce, avremmo una delle funzioni indici. Ammettiamo, almeno in linea di ipotesi, che questo piacere sia una quantità e che sia lecito trattarlo come tale; avremo allora

---

senza rendersene conto egli stesso. Egli annulla soltanto la derivata parziale rispetto a D_1 della prima delle espressioni (β) e la derivata parziale rispetto a D_2 della seconda. Così facendo, se z, D_1, D_2 sono le coordinate della superficie:

$$z = D_1 f(D_1 + D_2),$$

A. A. Cournot ottiene innanzi tutto il luogo dei punti in cui una parallela all'asse delle D_1 è tangente alla superficie stessa; e ottiene poi il luogo dei punti in cui una parallela all'asse delle D_2 è tangente alla superficie:

$$z = D_2 f(D_1 + D_2).$$

Abbiamo così tre equazioni:

$$p = f(D_1 + D_2), \qquad f(D_1 + D_2) + D_1 f'(D_1 + D_2) = 0$$
$$f(D_1 + D_2) + D_2 f'(D_1 + D_2) = 0$$

per determinare le tre incognite p, D_1, D_2; queste equazioni non determinano affatto i massimi che A. A. Cournot aveva in vista; esse determinano il punto di incontro delle proiezioni dei luoghi delle tangenti di cui abbiamo parlato; ma nulla autorizza a supporre che gli individui aventi il monopolio della vendita debbano arrestarsi in questo punto di incontro.

Il fatto che D_1, D_2 possono essere assunte come variabili indipendenti non implica in nessun modo l'ipotesi di A. A. Cournot che il primo monopolista non possa agire che su D_1, e il secondo soltanto su D_2. Al contrario, nel caso della concorrenza, che A. A. Cournot crede di trattare, il primo monopolista può agire su D_2, togliendo clienti al suo concorrente, e viceversa. In realtà il problema che A. A. Cournot tratta non è quello della concorrenza; è un altro problema che può essere formulato così: supponiamo due individui aventi il monopolio della vendita, e supponiamo innanzi tutto: che il primo possa fissare arbitrariamente la quantità D_1 che egli venderà, che il secondo debba lasciargliela vendere, e che solo a queste condizioni questi possa determinare la quantità D_2 che venderà egli stesso per procurarsi il massimo beneficio. Determineremo così i valori di D_2 e p che corrispondono ad un valore arbitrario di D_1. Supponiamo quindi che sia il secondo monopolista ad avere il privilegio di poter fissare arbitrariamente la quantità D'_2 che venderà; e che il primo monopolista, rispettando questa condizione, determini poi la quantità D'_1 che venderà egli stesso per procurarsi il massimo beneficio. Infine poniamo la condizione che tali due determinazioni diano i medesimi valori per D_1, D_2, p.

Per un altro errore che J. Bertrand commette in relazione al libro di L. Walras cfr. V. Pareto, *Cours d'économie politique* (v. nota 1, pag. 337), 1, pag. 67 (n. 145).

(1) *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 511.

E. Barone [*Il ministero della produzione nello stato collettivista*, « Giornale degli Economisti » (Roma), 1908, pag. 267-293, 391-414] ha seguito questa via.

il fondamento delle teorie di W. St. Jevons, K. Menger, L. Walras, W. Launhardt, A. Marshall, M. Pantaleoni, F. Y. Edgeworth, Irving Fisher, J. Lehr, H. H. Gossen e di altri ancora.

W. St. Jevons ha lungamente discusso questa ipotesi (1) per dimostrare che essa è ammissibile; e in realtà nulla si oppone a che la si accolga, colla riserva di verificarla a mezzo dei risultati che se ne deducono.

Vi è in questa teoria qualche cosa di superfluo per lo scopo che ci proponiamo; ed il superfluo è appunto ciò che nella teoria è dubbio. A dir vero, per determinare l'equilibrio economico, non abbiamo affatto bisogno di conoscere la misura del piacere; un indice del piacere è sufficiente. Da questa considerazione è nata la teoria che V. Pareto ha incominciato ad esporre nel 1898, che egli ha in seguito sviluppata, e che è presentata qui in tutta la sua generalità.

Supponiamo innanzi tutto che, ammessa la misurabilità del piacere, il piacere prodotto dal consumo o dal possesso di dx sia $\varphi_x dx$; che sia $\varphi_y dy$ quello che corrisponde a dy, ecc.; è chiaro che l'individuo continuerà i suoi scambi finchè l'espressione

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \ldots$$

è diversa da zero, e che egli si arresterà soltanto quando questa espressione si annulli, salva, bene inteso la considerazione dei punti termini. Otteniamo così l'equazione [8].

Ma per ottenere una equazione di questa forma, è inutile ammettere l'ipotesi che il piacere sia una quantità. Consideriamo due variabili x, y, e supponiamo che l'individuo si trovi nel punto x, y. Cerchiamo quale quantità dx della merce X sia necessario dargli per compensare una quantità dy della merce Y; otterremo così una equazione:

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0.$$

La scelta fra le due combinazioni x, y e $x + dx$, $y + dy$ è *indifferente* per l'individuo. Cercando in questo modo delle combinazioni successive la scelta delle quali sia indifferente, troveremo una *linea di indifferenza* (2).

---

(1) Con la concezione di quantità adottata attualmente in matematica, non si possono più ammettere le considerazioni di F. Y. Edgeworth, *Math. Psychics* (v. nota 2, pag. 336), pag. 7, ma si può liberamente scegliere un postulato, ed in questo senso accettare ciò che egli dice alla pag. 59: « Axiom-Pleasure is measurable, and all pleasures are commensurable; so much of one sort of pleasure felt by one sentient being equatable to so much of other sorts of pleasure felt by other sentients ». Naturalmente bisogna in seguito verificare se, nelle sue conseguenze, il postulato si accordi coi fatti.

(2) La locuzione *line of indifference* è stata introdotta nella scienza da F. Y. Edgeworth [*Math. Psychics* (v. nota 2, pag. 336), pag. 21] che supponeva l'esistenza della ofelimità e ne deduceva le linee di indifferenza. V. Pareto [*Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 540] ha invertito il problema, e da ciò che è noto deduce ciò che è incognito.

Partendo da un punto x', y', non appartenente alla linea trovata, avremo un'altra linea di indifferenza; così continuando potremo coprire di queste linee tutta una regione del piano. Le linee ci rappresentano i gusti dell'individuo. Sono le linee (β) della fig. 1. Le abbiamo già trovate per altra via al n. 3 di questa esposizione, attraverso la considerazione dei prezzi.

Le linee in questione possono essere considerate come la proiezione sul piano x, y, supposto orizzontale, delle linee di livello di una determinata superficie. Attribuiamo ad esse delle quote soggette a due condizioni:

1° che possano rappresentare i valori di una funzione continua;

2° che la quota di una linea che l'individuo scelga a preferenza di un'altra sia maggiore della quota di quest'ultima.

All'infuori di queste condizioni, le quote siano assolutamente arbitrarie. Otterremo così delle superficie che potranno essere dette *superficie degli indici del piacere.*

Nel caso di un numero qualunque di variabili, la considerazione delle linee di indifferenza conduce ad una equazione della forma [6] che, teoricamente almeno, potrà essere considerata come risultato dell'esperienza. Per ottenerla non abbiamo fatto alcuna ipotesi sul piacere; abbiamo soltanto confrontate fra loro alcune quantità di merci.

Da un punto di vista esclusivamente matematico, si potrebbe fare a meno di dare una denominazione alle funzioni indici. La denominazione stessa può riuscire utile dal punto di vista didattico. Se il piacere esiste, e se è rappresentato da una funzione φ, questa è ciò che alcuni economisti chiamano *utilità totale;* φ_x, φ_y sono per essi le *utilità marginali*, mentre sono le *rarità* per L. WALRAS, ecc.

Al solo scopo di evitare le logomachie alle quali le idee accessorie suggerite dai termini di *utilità*, *rarità*, ecc. troppo spesso hanno dato luogo fra gli economisti classici, e qualche volta anche fra gli economisti matematici, V. PARETO ha proposto il termine di *ofelimità totale* per φ, e di *ofelimità elementari* per φ_x, φ_y... Questa denominazione ha il vantaggio di non far sorgere idee accessorie e di costringere così di attenersi semplicemente alla definizione della funzione φ per sapere che cosa questa funzione sia. Del resto, da un punto di vista rigorosamente scientifico, tutte le questioni di terminologia non hanno la minima importanza.

16. *I caratteri delle linee di indifferenza.* — Se fosse possibile fare sulla società umana esperienze simili a quelle che il chimico fa nel suo laboratorio, la determinazione delle linee (α) della fig. 1 condurrebbe probabilmente ai risultati più precisi. Ma la difficoltà, o per meglio dire, l'impossibilità di eseguire simili esperienze, porta a che sappiamo assai poco sulle linee (α), mentre sappiamo qualche cosa di più, per quanto sempre poco, sulle linee (β).

Riguardo alle linee (α), possiamo dire che, per molte merci, la quantità di Y che è acquistata, la *domanda* di Y, diminuisce all'aumentare di p; e

che la quantità di X che è venduta, l'*offerta* di X, cresce — sebbene possa anche decrescere — al crescere di p. Quest'ultimo fatto era stato soltanto intravisto a mezzo dell'osservazione diretta, ed è la teoria matematica dello scambio che lo ha messo bene in luce.

Riguardo alle linee (β), abbiamo delle cognizioni più ampie. Innanzi tutto, in generale, occorre aumentare la quantità di Y per compensare una diminuzione di X; dunque, se x, y sono le coordinate di una curva di indifferenza, deve essere:

$$[17] \qquad \frac{dy}{dx} < 0,$$

In generale, e salvo un piccolissimo numero di eccezioni, la quantità variabile dy che si è disposti a dare, lungo una linea di indifferenza, in cambio di una quantità costante dx, diminuisce man mano che x cresce; si ha in ciò il secondo carattere delle linee di indifferenza espresso da:

$$[18] \qquad \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

Tuttavia, dy decresce tanto meno quanto più grande è x, il che — salvi sempre taluni casi eccezionali — fa sì che debba essere:

$$[19] \qquad \frac{d^3y}{dx^3} < 0$$

Per una classe molto ampia di beni economici (cfr. n. 15), quando si passa da una linea di indifferenza ad un'altra, le variazioni secondo l'asse delle x e quelle secondo l'asse delle y dànno:

$$[20] \qquad \delta_x \frac{dy}{dx} > 0, \qquad \delta_y \frac{dy}{dx} < 0.$$

17. *I caratteri degli indici di ofelimità.* — Questi caratteri possono essere in parte dedotti da quelli delle linee di indifferenza. Sia φ la funzione indice; lungo la linea di indifferenza si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y},$$

e poichè, in virtù della diseguaglianza [17], il primo membro è negativo, φ_x, φ_y debbono avere il medesimo segno; adotteremo il segno positivo. Questo è il primo carattere degli indici.

Le diseguaglianze [20] ci dànno:

$$[21] \qquad \varphi_{xx}\,\varphi_y - \varphi_{xy}\,\varphi_x < 0, \qquad \varphi_{yy}\,\varphi_x - \varphi_{xy}\,\varphi_y < 0,$$

dove φ_{xx} indica la derivata seconda rispetto ad x, ecc. È questo il secondo carattere degli indici. Le diseguaglianze [18] non conducono alla determinazione di altri caratteri.

Nel caso importantissimo che φ_x dipenda soltanto da x, e φ_y soltanto da y, è $\varphi_{xy} = 0$, e le diseguaglianze [21] diventano:

[22] $$\varphi_{xx} < 0, \qquad \varphi_{yy} < 0.$$

Questo secondo carattere degli indici è stato in principio indicato col nome di *decrescenza del grado finale di utilità* o *decrescenza del grado finale di rarità* (1).

Nel caso di cui ci occupiamo le diseguaglianze [19] dànno

[23] $$\varphi_{xxx} > 0, \qquad \varphi_{yyy} > 0.$$

I caratteri indicati degli indici di ofelimità possono essere ricavati direttamente dall'esperienza; e se ne deducono allora i caratteri delle linee di indifferenza.

L'esperienza ci fornisce ancora altre nozioni. Ed è questo un campo di studi appena esplorato. Per un momento possiamo dividere le merci in tre generi che si distingueranno per i valori di φ_{xy}.

1° $\varphi_{xy} = 0$. Le merci X, Y si diranno *indipendenti*. Il piacere prodotto dal consumo di X, o dal possesso di X, è indipendente dalla quantità di Y consumata o posseduta, e viceversa.

Un gran numero di beni economici presentano, approssimativamente, questo carattere.

2° $\varphi_{xy} > 0$. Diremo che le merci X, Y hanno una dipendenza del primo genere. Questo carattere appartiene in particolare ai beni economici che ci dànno maggior piacere riuniti che separati. Ve ne è un numero grandissimo.

3° $\varphi_{xy} < 0$. Diremo che le merci X, Y hanno una dipendenza del secondo genere. Questo carattere appartiene in particolare ai beni economici che possono reciprocamente sostituirsi nel consumo.

Pei beni indipendenti si verifica in generale il carattere [22]. Una eccezione importante a questa regola è rappresentata dal risparmio.

Il carattere [22] sussiste anche pei beni dipendenti, ma le eccezioni sono più numerose.

Nel caso di beni indipendenti, o di beni aventi una dipendenza del primo genere, una merce composta in proporzioni costanti di X ed Y può essere considerata come semplice rispetto al carattere [22]; per tale merce composta deve aversi cioè:

$$d^2\varphi < 0,$$

e, ponendo $y = \alpha x$,

$$\varphi_{xx} + 2\,\alpha\,\varphi_{xy} + \alpha^2\,\varphi_{yy} < 0.$$

---

(1) Si è voluto dare a questo carattere un valore assoluto, farne una specie di assioma. Bisogna semplicemente dire che esso si verifica in un gran numero di casi.

Occorre per ciò che sia:

[24] $$\varphi_{xx}\,\varphi_{yy} - \varphi^2_{xy} > 0.$$

Questa diseguaglianza è verificata pei beni indipendenti pei quali si ha:

$$\varphi_{xx} < 0; \qquad \varphi_{yy} < 0; \qquad \varphi_{xy} = 0.$$

È verificata anche pei beni che hanno una dipendenza del primo genere, nel qual caso essa è una conseguenza delle diseguaglianze [21]; può sussistere e non sussistere per i beni aventi una dipendenza del secondo genere.

Nel caso di più variabili si porrà:

$$y = \alpha x, \qquad z = \beta x, \ldots$$

e si dovrà avere:

$$\varphi_{xx} + \alpha^2\varphi_{yy} + \ldots \quad + 2\alpha\varphi_{xy} + \ldots \quad 2\alpha\beta\varphi_{yz} + \ldots < 0.$$

È noto che occorre perciò che sia:

[25] $$\varphi_{xx} < 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots$$

condizioni che ci dànno altri caratteri degli indici di ofelimità (1).

18. *L'ofelimità.* — Se l'ofelimità esiste, si dovrà trovarla fra le funzioni indici dell'ofelimità. Si tratta di sapere in qual caso sia possibile distinguerla.

Tale possibilità sussiste innanzi tutto quando i beni sono indipendenti. La equazione:

$$0 = q_x\,dx + q_y\,dy + q_z\,dz + \ldots$$

che l'esperienza ci fornisce in questo caso, deve avere un fattore integrante tale che l'equazione precedente dia:

$$0 = \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \ldots$$

φ_x, φ_y,... essendo le derivate parziali di una medesima funzione, ed essendo tali che φ_x sia funzione della sola x, φ_y della sola y, ecc. Esiste d'altra parte una sola funzione che soddisfi a queste condizioni, perchè le altre, essendo della forma $F(\varphi)$, hanno una derivata parziale della forma $\varphi_x F'(\varphi)$, che non è funzione della sola x. Prescindendo da una costante che serve a fissare l'unità

---

(1) V. PARETO, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 239 e seguenti. Bisogna inoltre considerare la *gerarchia* delle merci [V. PARETO, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334,) pag. 245 seguenti; *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 257 e seguenti]. Qui, trattando esclusivamente la parte matematica, tralasciamo di occuparci di molte questioni, che sono tuttavia importantissime dal punto di vista economico.

di misura, si può dunque stabilire una corrispondenza univoca fra la funzione φ e l'ofelimità (il piacere); e la funzione stessa può così servire a misurarla.

Oltre questo caso ve n'è un altro nel quale si può ancora stabilire, a mezzo dell'esperienza, una corrispondenza univoca fra la funzione φ e l'ofelimità, ed è quello in cui il ciclo è aperto. Se si ammette allora di poter fare le esperienze necessarie, si può, almeno teoricamente, determinare l'ofelimità (1).

Va osservato che queste ricerche rimangono estranee alla determinazione dell'equilibrio.

19. *Corrispondenza fra gli indici di ofelimità e le curve di offerta e di domanda.* — Supponiamo in primo luogo di avere due merci. In base al poco che si sa delle leggi di offerta e di domanda, è possibile assegnarsi le curve (α) della fig. 1 e cercare le curve (β); ma molto spesso si trovano per queste ultime, forme che non concordano coi fatti noti. La via inversa conduce a migliori risultati. Se sono assegnate le curve (β), in base a ciò che si conosce delle scelte, si trovano più facilmente delle linee (α) in armonia coi risultati dell'esperienza.

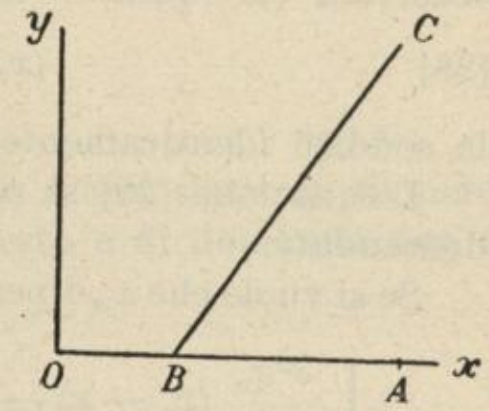

Fig. 2.

Alcuni economisti hanno creduto che fosse possibile così, partendo dalle curve (β), dare una *dimostrazione* delle leggi di offerta e domanda. Questo è un errore. È vero invece che alcune forme delle linee (β) appaiono probabili in conseguenza dell'accordo esistente tra i risultanti dell'osservazione e le proprietà delle linee (α) che se ne deducono.

Supponiamo che un individuo abbia una quantità $OA = x_o$ della merce x, ed assumiamo come linee (α) della fig. 2 delle rette BC tali che ABC sia un angolo acuto, ed $OB = mx_o$. Queste forme delle linee (α) non sono in contraddizione con ciò che sappiamo delle leggi di offerta e di domanda per alcune merci. Le linee (β) corrispondenti ad esse hanno per equazione differenziale:

$$y\,dx + \left(\frac{1-m}{m}x - \frac{y}{mn}\right)dy = 0$$

essendo $n = \text{tang } ABC$.

L'integrale di questa equazione dà per la funzione indice:

[26] $$\varphi = c + \frac{1-m}{m}\log y + \log(nx - y)$$

(1) V. Pareto, *Man. d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 546 e seguenti.

e quindi le funzioni indici in generale, sono:

$$\psi = F(\varphi), \qquad \psi_x = \frac{n}{nx - y} F'(\varphi)$$

$$\psi_y = \frac{n(1-m)\,x - y}{my(nx - y)} F'(\varphi).$$

Non conosciamo merci alle quali queste espressioni possano applicarsi.

20. *Caso di un numero qualunque di merci.* — In generale, se l'equazione delle varietà di offerta e di domanda è:

[27] $$x = f(x_o,\ y,\ z,\ldots),$$

occorrerà che questo valore di x sostituito nell'equazione:

[28] $$(x_o - x)\,\varphi_x = y\,\varphi_y + z\,\varphi_z + \ldots$$

la soddisfi identicamente.

L'equazione [28] si riferisce al caso in cui X è offerta e Y, Z,... sono domandate.

Se si vuole che φ_x dipenda soltanto da x, φ_y soltanto da y, ..., si dovrà avere:

[29] $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_o}{\partial x\,\partial y}(x_o - x) - \left(\dfrac{\partial x_o}{\partial x} - 1\right)\dfrac{\partial x_o}{\partial y} = 0, & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 x_o}{\partial y\,\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 x_o}{\partial y\,\partial u} = 0, & \ldots \end{cases}$$

oppure:

[30] $$\begin{cases} \left(\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_o}\right)^2 - \dfrac{\partial f}{\partial x_o}\right)\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_o\,\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x_o}(x_o - x) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_o}^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o - x) = 0, \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_o}^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_o\,\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x_o}\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_o\,\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x_o}\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_o}\right)^2 = 0, \ldots \end{cases}$$

Queste sono le condizioni che debbono essere soddisfatte perchè una legge di offerta e di domanda sia compatibile con l'indipendenza dei consumi.

21. *Forma lineare delle varietà di offerta e di domanda e consumi indipendenti.* — Possiamo ora risolvere il problema seguente: È compatibile con la condizione che i consumi delle merci siano indipendenti, una forma lineare delle varietà di offerta e di domanda?

Perchè ciò sia possibile occorre che, posto:

[31] $$x = \alpha + \beta y + \gamma z + \ldots,$$

α, β,... essendo funzioni di x_o, le identità [30] siano verificate.

1° Se si hanno due sole merci,

$$x = \alpha + \beta y,$$

le identità [30] si riducono ad una sola, la prima, ed è:

$$\beta'' = 0, \quad \beta' t - \beta\beta' + \beta t' + \beta'^2 x_0 = 0,$$

$$t^2 - \beta(t + x_0 t') + \beta' t x_0 = 0, \quad t = \beta\alpha' - \beta'\alpha.$$

Gli apici indicano la derivazione rispetto ad x_0. Da queste identità si deduce:

$$\alpha = h(x_0 - n) + n, \quad \beta = m(x_0 - n),$$

m, n, h, essendo delle costanti arbitrarie.

2° Se si hanno tre merci, le identità [30] si riducono a tre. Le due prime sono soddisfatte dai valori precedenti di α e β, e da:

$$\gamma = m(x_0 - n),$$

ma l'ultima dà la condizione impossibile:

$$2\, m^2(x_0 - b) = 0.$$

Un risultato analogo si ottiene nel caso che le merci siano in numero superiore a tre. La forma [31] delle varietà di offerta e di domanda non è dunque possibile per più di due merci.

Nel caso di due merci si ha:

$$x = n + h(x_0 - n) + m(x_0 - n)\, y,$$

$$\varphi_x = \frac{A}{x - n}, \qquad \varphi_y = A\,\frac{1 - h - my}{y(h + my)},$$

$$\varphi = C + A \log (x - n) - A\,\frac{h - 1}{h} \log y - \frac{A}{h} \log (h + my).$$

Queste forme delle funzioni indici sono accettabili, e a condizione che sia $my < h$, le diseguaglianze [17], [18], [19] sono soddisfatte per φ_y.

22. *Funzioni indici corrispondenti a determinate curve di offerta e di domanda.* — Quale è la forma della funzione indice che corrisponde a curve di offerta e di domanda della forma: $x = \alpha + \beta y$, anche nel caso di consumi dipendenti?

Abbiamo: $$(x_0 - x)\, \varphi_x - y\varphi_y = 0.$$

Mediante un cambiamento di variabili indipendenti, questa equazione diviene:

$$(\alpha - x_0)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + y(\beta' y + \alpha')\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

dalla quale, integrando, otteniamo:

$$\varphi = C + \frac{1}{y}\, e^{-\omega} - \int \frac{\beta'\, dx_0}{x_0 - \alpha}\, e^{-\omega}, \qquad \omega = \int \frac{\alpha'}{x_0 - \alpha}\, dx_0.$$

Nel caso precedente, si ha:

$$\omega = \frac{h}{1-h}\log(x_0 - n), \qquad \varphi = (x_0 - n)^{\frac{h}{h-1}}\frac{my+h}{y}.$$

Disponendo convenientemente della funzione arbitraria $F(\varphi)$, possiamo cambiare questo valore di φ in quello precedentemente ottenuto.

23. *Forma iperbolica delle curve di offerta e di domanda.* — Le curve di offerta e di domanda sono date generalmente da relazioni fra le quantità e i prezzi.

Seguendo l'esempio di A. MARSHALL, molti economisti hanno supposto delle curve di offerta e di domanda date dall'equazione (1):

$$y\,p^n = c,$$

dove c è una costante.

Bisogna cercare a quali funzioni indici questa forma corrisponda; trascurando questa ricerca si rischia di enunciare proposizioni contraddittorie.

1° Se consideriamo il caso di due merci soltanto, porremo:

$$s = y\,p^n$$

s essendo una funzione di x_0. Indicando con $\bar{\varphi}_x$ la funzione inversa di φ_x avremo:

$$x_0 = \bar{\varphi}_x\left(\frac{1}{p}\varphi_y\right) + y\,p.$$

A mezzo di derivazioni successive rispetto ad y e a p, considerate come variabili indipendenti, otterremo l'equazione:

$$\varphi_y{}^2 + y\varphi_y\,\varphi_{yy} - ny^2\,\varphi_y\,\varphi_{yyy} + 2ny^2\,\varphi_{yy}^2 = 0,$$

che ha per integrale generale:

$$\varphi_y = \frac{1}{Ay + By^{\frac{1}{n}}}$$

Ne risulta:

$$\varphi_x = \frac{M}{x}, \qquad \varphi_y = \frac{M}{MBy^{\frac{1}{n}} - y}, \qquad yp^n = \left(\frac{x_0}{MB}\right)^n.$$

Questi valori sono accettabili, ma soltanto entro certi limiti. Occorre che φ_y sia positiva e che φ_{yy} sia negativa.

---

(1) A. MARSHALL, *Principles of Economics* (5ª ediz.), 1, Londra 1907, pag. 838-840.

Poichè la quantità x non può divenire negativa, si ha sempre:

$$x_0 - py > 0,$$

da cui:

[32] $$y^{\frac{1}{n}-1} > \frac{1}{BM}$$

Perchè φ_y sia positiva, bisogna avere:

$$y^{\frac{1}{n}-1} > \frac{1}{BM};$$

e perchè φ_{yy} sia negativa occorre che sia:

$$y^{\frac{1}{n}-1} > \frac{n}{BM}.$$

Vi sono due casi da considerare:

1° $n < 1$. Le condizioni relative a φ_y, φ_{yy} sussistono sempre quando la diseguaglianza [32] è verificata. Le curve di offerta e di domanda possono essere assunte senza restrizioni.

2° $n > 1$. Perchè sia $x > 0$, $\varphi_y > 0$, occorre che si abbia:

$$y^{1-\frac{1}{n}} < MB;$$

e perchè sia $\varphi_{yy} < 0$, occorre che:

$$y^{1-\frac{1}{n}} < \frac{MB}{n}.$$

La porzione di curva di offerta e di domanda compresa nell'intervallo:

$$y^{1-\frac{1}{n}} < MB, \qquad y^{1-\frac{1}{n}} > \frac{MB}{n}$$

non è dunque ammissibile; sarebbe apparsa invece ammissibile, se non si fosse tenuto conto della condizione $\varphi_{yy} < 0$.

Facciamo ad esempio:

$$n = 2, \quad MB = 2, \quad x_0 = 10;$$

avremo:

$$p\sqrt{y} = 5, \quad x = 10 - py, \quad \frac{1}{M}\varphi_y = \frac{1}{2\sqrt{y} - y}$$

$$\frac{1}{M}\varphi_{yy} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{y}} - 1}{(2\sqrt{y} - y)^2}.$$

In conseguenza:

$y =$	0.04	0.25	1	4
$p =$	25	10	5	2.5
$x =$	9	7.5	5	0
$\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 =$	4	1	0	$-\frac{1}{2}$
$\varphi_{yy} =$	−	−	0	+

Se non si tenesse conto del segno di φ_{yy}, si potrebbe quindi far variare y da 0 a 4; ma se si vuole che φ_{yy} sia negativa, occorre arrestarsi a $y = 1$.

Questa analisi mostra che non è possibile adottare senza restrizioni per le curve di offerta e di domanda la forma:

$$xp^n = \text{costante}$$

se si ammette che sia (1):

$$\varphi_y > 0, \quad \varphi_{yy} < 0.$$

3° Se si hanno più di due merci, tre per esempio, e se i prezzi di queste tre merci X, Y, Z, sono:

$$1.\ p_y,\ p_z,$$

occorrerà supporre che sia:

$$yp_y^n = f(x_o, p_z);$$

allora, restando costante p_z, si avrà:

$$yp_y^n = \text{costante}.$$

Vediamo se ciò sia possibile.

L'equazione precedente può scriversi:

$$x_o = f(p_y\, y^{\frac{1}{n}}, p_z)$$

e dovrà essere:

$$f(p_y\, y^{\frac{1}{n}}, p_z) = \overline{\varphi}_x\left(\frac{1}{p_y}\varphi_y\right) + p_y\, y + p_z\,\overline{\varphi}_z\left(\frac{p_z}{p_y}\varphi_y\right).$$

Assumiamo come variabili indipendenti y, p_y, p_z. Vedremo che $\frac{\partial f}{\partial p_z}$ è una funzione di $\frac{p_z}{p_y}\varphi_y$ e che, per conseguenza:

$$\varphi_y = \frac{M}{y^{\frac{1}{n}}}.$$

---

(1) A. MARSHALL (v. nota 1, pag. 358) ammette queste diseguaglianze, ma non sembra conoscere le restrizioni che esse importano.

L'identità precedente diventerà quindi:

$$f(p_y y^{\frac{1}{n}}, p_z) = \bar{\varphi}_x\left(\frac{1}{p_y y^{\frac{1}{n}}}\right) + p_y y + p_z \bar{\varphi}_z\left(\frac{p_z}{p_y y^{\frac{1}{n}}}\right)$$

relazione che può sussistere soltanto per $n = 1$. Così, tolto questo caso, non sarebbe possibile ammettere che su un mercato sul quale si scambiano più merci a consumi indipendenti, sia (1):

$$y p^n = c.$$

dove c indica una costante.

24. *Forme da provare per le curve di offerta e di domanda.* — Se per le funzioni indici elementari si assume la forma:

$$\varphi_x = \frac{A}{x^\alpha}, \qquad \varphi_y = \frac{B}{y^\beta}, \qquad \ldots,$$

A, B. ..., α, β, ..., essendo delle quantità positive, le diseguaglianze:

$$\varphi_x > 0, \qquad \varphi_{xx} < 0, \qquad \ldots,$$

sono verificate. Ma per tener conto delle particolarità che si presentano in pratica, bisogna ricorrere a funzioni della forma:

$$\varphi_x = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{A_1}{x^{\alpha_1}} + \ldots,$$

le quantità A, A_1, ..., potendo essere in parte negative. È allora il caso di esaminare sotto quali condizioni le diseguaglianze:

$$\varphi_x > 0, \qquad \varphi_{xx} < 0, \qquad \ldots,$$

siano soddisfatte.

Sarebbe molto utile continuare ricerche di questo genere, sforzandosi così di mettere in rapporto fra loro tutti i fatti noti riguardo allo scambio delle merci.

25. *I vincoli di primo genere.* — I casi concreti di scambio si avvicinano molto al caso teorico basato sull'ipotesi che i vincoli consistano nella condizione che la somma totale delle merci rimanga costante. Ma vi è un gran numero di altri vincoli dei quali bisogna tener conto. Vi sono innanzi tutto i prelevamenti a mezzo dell'imposta, e le spese dell'amministrazione pubblica. Le funzioni indici per questi incassi e per queste spese (se esistono) sono evidentemente di genere del tutto diverso da quello delle funzioni indici per gli individui. Vi sono merci il cui prezzo è fissato per legge (ad esempio il tabacco in Francia), o dal costume, dall'uso, ecc. Vi è una quantità di vincoli derivanti dal commercio all'ingrosso e al minuto.

---

(1) Nessuna traccia di simili ricerche è nell'opera di A. MARSHALL (v. nota 1, pag. 358); in conseguenza i risultati a cui egli giunge sono incompleti ed, in parte, erronei.

L'enumerazione di tutti i vincoli che possono presentarsi è pei sistemi economici altrettanto impossibile che pei sistemi meccanici. Nell'un caso e nell'altro, bisogna studiare i diversi tipi che si pensa abbiano una qualche importanza pratica.

I casi concreti della produzione presentano un gran numero di tipi di vincoli. Conviene innanzi tutto distinguere diverse collettività, il che conduce a studiare ciò che gli economisti hanno chiamato il commercio nazionale, distinto dal commercio internazionale. Ma, in uno stesso paese, si possono trovare entrambi questi due tipi di commercio. Per procedere rigorosamente, bisogna prima studiare una collettività isolata e considerare poi un certo numero di tali collettività che si trovino fra loro in rapporti diversi.

Un tipo importantissimo di vincolo è quello che esprime i rapporti tra le quantità ricevute dal produttore e le quantità trasformate. Lo studio di esso si ricollega a quello dei diversi generi di organizzazione economica.

Vi sono produzioni indipendenti; ve ne sono altre che sono più o meno dipendenti; tra queste ultime, alcune per le quali la dipendenza è stretta, come ad esempio la produzione della paglia e del grano. Queste considerazioni conducono a studiare una classe numerosa di vincoli (1).

Il costo della produzione è in rapporto con l'importanza dell'impresa che ad essa si dedica. Di qui nascono altri vincoli.

Abbiamo visto come, supposto che per fabbricare dx si debba impiegare una quantità $a_x\,dx$ di A, una quantità $b_x\,dx$ di B, ecc., le quantità a_x, b_x, ... prendono il nome di *coefficienti di fabbricazione* o *di produzione*. Vi sono vincoli che stabiliscono determinati rapporti tra i coefficienti di produzione e le quantità prodotte. Il caso più semplice è quello in cui i coefficienti stessi sono costanti; essi possono essere funzioni continue o discontinue delle quantità prodotte totali, delle quantità prodotte da ciascuna impresa, ecc.

Una classe molto importante di relazioni è quella che esprime l'esistenza di rapporti fra i coefficienti di produzione. Da lungo tempo tali rapporti erano stati vagamente intravisti nei fenomeni dell'agricoltura estensiva. In generale vi sono gruppi di coefficienti tali che l'aumento degli uni può essere compensato dalla diminuzione degli altri (2).

---

(1) Non si saprebbe ammettere la definizione di L. WALRAS [*Éléments d'économie politique pure* (v. nota 4, pag. 334), pag. XII]: « *L'économie politique pure* est essentiellement la théorie de la détermination des prix sous un régime hypothétique de libre concurrence absolue ». Per lo meno, se la si ammette, poichè non bisogna mai disputare sulle parole, è necessario ricorrere ad un altro termine per indicare la teoria dei fenomeni economici quali si presentano nella realtà. La definizione di L. WALRAS escluderebbe dall'economia politica pura perfino la teoria del monopolio.

(2) L. WALRAS nelle prime edizioni del suo lavoro: *Éléments d'économie politique pure* (v. nota 4, pag. 334) ha considerato in modo corretto i coefficienti di fabbricazione. Ha avuto il torto di cambiare il suo punto di vista nella terza edizione, Losanna 1896, pag. 485-492.

Si ha così fra i coefficienti del gruppo una equazione:

$$f(a_x,\ b_x,\ \ldots) = 0.$$

L'esistenza di simili equazioni è incontestabile; la natura di esse è ancora assai poco nota. Un vasto campo si apre qui agli studi di economia matematica.

Vi è infine un gran numero di vincoli che derivano dalle leggi fiscali, dalle così dette leggi sociali, dalle misure imposte dai sindacati, ecc.

L'economia applicata deve studiarli tutti; l'economia pura trae da questo studio soltanto la nozione dei tipi che le conviene di analizzare.

26. *I vincoli di secondo genere* (1). — Essi consistono nella determinazione delle vie percorse nello scambio; il più semplice sistema di vincoli di questo genere è quello dei prezzi costanti; ed è anche uno dei più diffusi in pratica.

I prezzi variabili possono essere tali in relazione alla quantità totale della merce; è necessario ammettere ciò se si vuole avere un solo prezzo sul mercato. Oppure i prezzi possono variare con la quantità di merce acquistata o venduta da ciascun individuo; ed allora si hanno diversi prezzi su un medesimo mercato. La pratica ci offre esempi dell'uno e dell'altro di questi casi.

Le vie seguite nella produzione presentano situazioni analoghe; e i tipi si complicano in conseguenza dei caratteri che i coefficienti di produzione possono avere.

La considerazione dei vincoli del secondo genere è molto importante nei riguardi della speculazione e di altri fenomeni del genere (2).

27. *I tipi dei fenomeni economici* (3). — Da un punto di vista concreto, si possono distinguere due tipi principali di fenomeni economici, il secondo dei quali si suddivide a sua volta in due, onde i tipi sono in tutto

---

(1) L'origine di questa teoria può rintracciarsi nel famoso problema del *basket* di A. MARSHALL, studiato anche da F. Y. EDGEWORTH [«Giornale degli Economisti» (Roma) 1891, pag. 233-245]. Ma non sembra che questi autori si siano resi conto della generalità e dell'importanza della questione. F. Y. EDGEWORTH, *ibid.*, pag. 234, dice perfino, in nota: «Molte sottigliezze che sono necessarie per rifinire logicamente (le dottrine economiche) nella loro forma più generale ed astratta, hanno una ristrettissima portata pratica. A. MARSHALL, *Principles*, V, 4, 7 ».

La considerazione dei vincoli del secondo genere è invece fondamentale per stabilire la teoria dell'equilibrio economico; e questa può non avere importanza pratica quando è trattata come fa A. MARSHALL, ma ne acquista una grandissima quando è trattata in modo generale che la raccosti alla realtà.

(2) La teoria generale è stata data in V. PARETO, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 172 e seg., pag. 510 e seg.

(3) È preferibile parlare di tipi astratti, dei quali si stabiliscono rigorosamente le condizioni matematiche, piuttosto che considerare i tipi concreti, necessariamente un po' vaghi, di libera concorrenza, di monopoli, ecc., come lo si fa in generale, e come ha fatto V. PARETO nel suo *Cours d'économie politique* (v. nota 1, pag. 337).

tre: I) libera concorrenza; II) monopolio esercitato nell'interesse di alcuni individui; III) monopolio esercitato nell'interesse della collettività.

Il primo tipo si distingue dagli altri due innanzi tutto per il fatto che le persone che agiscono in conformità di esso accettano i prezzi del mercato quali sono, e non cercano di modificarli direttamente, sebbene, senza volerlo o senza rendersene conto, li modifichino indirettamente. Le persone che agiscono in conformità degli ultimi due tipi sanno, vogliono, possono modificare direttamente i prezzi; è la diversità degli scopi che esse si propongono che differenzia i due tipi.

Abbiamo visto al n. 11 in qual modo queste considerazioni si traducano in linguaggio matematico.

Si può d'altra parte considerare una infinità di altri tipi, vari a seconda delle condizioni che si vorranno imporre (n. 37).

Quanto alla produzione poi, il tipo I è caratterizzato dal fatto che il costo totale di produzione è uguale al prezzo di vendita; il tipo II è caratterizzato dal fatto che il prezzo di vendita supera il costo di produzione; per il tipo III non è stabilito *a priori* alcun rapporto fra il costo di produzione e il prezzo di vendita; tale rapporto risulta dalla condizione caratteristica per questo tipo, consistente nella realizzazione di un certo massimo per la collettività.

L'eguaglianza fra costo di produzione e prezzo di vendita non deve sussistere soltanto per la quantità totale, ma anche per l'infima particella prodotta (1).

Può darsi che queste due condizioni non possano essere realizzate insieme, il che introduce nuove suddivisioni nei tipi considerati.

28. *Il massimo di ofelimità per una collettività* (2). — I termini usati per definire il III tipo concreto dei fenomeni economici sono vaghi e debbono essere precisati in uno studio rigorosamente scientifico.

Vi sono due problemi da risolvere quando si cerchi di procurare il massimo di benessere ad una collettività. Occorre innanzi tutto fissare le norme di distribuzione che si ritiene opportuno seguire, problema questo la cui soluzione rientra principalmente nel campo della sociologia. Adottate che siano le norme di distribuzione, si può ricercare quale posizione dia — seguendo sempre le norme stesse — il massimo benessere possibile agli individui della collettività.

---

(1) V. PARETO, *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 541; *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 620.

Gli economisti classici non sospettano neppure l'esistenza di simili problemi e di altri analoghi.

(2) V. PARETO, *Cours d'économie politique* (v. nota 1, pag. 337), 1, pag. 257 (n. 385); *Id.*, 2, pag. 92; *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 354, 362, 617, 655 e seguenti.

Consideriamo una posizione qualunque e supponiamo che ci si allontani da essa di una quantità piccolissima, compatibilmente con i vincoli. Se ciò facendo, si aumenta il benessere di tutti gli individui della collettività, è evidente che la nuova posizione è più vantaggiosa per ciascuno di questi; e viceversa, essa è meno vantaggiosa se, assumendola, si diminuisce il benessere di tutti gli individui. Il benessere di alcuni di questi può del resto rimanere costante senza che le conclusioni cambino. Ma se invece, il piccolo movimento considerato fa aumentare il benessere di alcuni individui e diminuire quello di altri, non si può più affermare senz'altro che l'effettuarlo sia vantaggioso per la collettività.

Queste considerazioni appunto conducono a definire come posizione di massimo di ofelimità quella dalla quale è impossibile allontanarsi di una quantità piccolissima in modo che tutte le ofelimità di cui gli individui godono, subiscano un aumento o una diminuzione, tranne quelle che restano costanti. In altri termini, prescindendo da quelle che rimangono costanti, le funzioni indici non debbono aumentar tutte, nè tutte diminuire.

Siano per gli individui 1, 2, 3, ..., Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... le funzioni indici totali, e φ_{1a}, φ_{2a}, φ_{3a}, ... le funzioni indici di A. Consideriamo l'espressione:

$$[33] \qquad \delta S = \frac{1}{\varphi_{1a}} \delta\Phi_1 + \frac{1}{\varphi_{2a}} \delta\Phi_2 + \ldots,$$

Se le $\delta\Phi_1$, $\delta\Phi_2$, ... sono nulle in tutte le direzioni, gli individui posseggono a sazietà di tutti i beni. Tolto questo caso, che è inutile considerare, l'espressione precedente può annullarsi soltanto se una parte delle $\delta\Phi$ sono positive e le altre sono negative; quindi:

$$[34] \qquad \delta S = 0$$

caratterizza, in base alla nostra definizione, il massimo di ofelimità per la collettività considerata.

La quantità δS rappresenta una quantità della merce A.

Quando la collettività si riduce ad un solo individuo, la definizione del massimo di ofelimità data per la collettività stessa diviene identica alla definizione del massimo di ofelimità per un individuo (1).

29. *Le trasformazioni* (2). — Le variabili:

$$x, y, z, \ldots$$

possono rappresentare delle quantità di cose materiali, degli impieghi di queste medesime cose durante l'unità di tempo, delle quantità di energia, ecc.

---

(1) *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 618.

(2) *Manuale di economia politica* (v. nota 1, pag. 334), pag. 172, 291. In uno studio di economia pura conviene sostituire questa nozione astratta e generale alle nozioni in uso, concrete e poco precise.

Ad esempio x può rappresentare un cavallo che fa girare un macinatoio, l'energia meccanica sviluppata dal cavallo nell'unità di tempo, l'impiego del cavallo durante l'unità di tempo. È indifferente, dal punto di vista dello studio dell'equilibrio economico, che x rappresenti l'energia meccanica di un corso d'acqua — energia che viene trasformata nella produzione e consumata — oppure l'impiego del corso d'acqua stesso. La distinzione acquista importanza soltanto dal punto di vista del modo in cui viene stabilita la contabilità dell'impresa che si dedica alla produzione. La nozione di *capitale*, che ha grandissima importanza per gli economisti classici, dal punto di vista dell'economia matematica è soltanto una nozione molto secondaria, relativa alla maniera di stabilire la contabilità delle imprese (1).

A seconda delle circostanze nelle quali questo concetto si presenta, un solo e medesimo oggetto materiale può corrispondere a beni economici diversi; occorre allora distinguere questi ultimi con lettere diverse. Sotto questo aspetto, si possono considerare tre generi principali di trasformazioni, cioè le trasformazioni materiali, le trasformazioni nello spazio, le trasformazioni nel tempo.

30. *L'economia matematica non risolve direttamente casi pratici.* — Le considerazioni estremamente sommarie che abbiamo fatto qui circa la corrispondenza fra casi concreti e casi teorici dovrebbero essere largamente sviluppate. Ma ciò costituisce l'oggetto dell'economia applicata, della quale non dobbiamo occuparci.

Un errore profondo, a creare il quale hanno purtroppo contribuito anche alcuni economisti matematici, consiste nel supporre che l'economia matematica possa risolvere direttamente i problemi dell'economia pratica. Ciò non è in nessun modo. L'economia matematica è soltanto una delle numerose parti che, riunite in sintesi, potranno dare la soluzione dei problemi pratici (2). Essa è con questi nello stesso rapporto in cui la meccanica razionale è coi problemi della meccanica pratica, nel rapporto in cui la termodinamica è coi problemi pratici di costruzione e di uso delle macchine a vapore, nel rapporto in cui la chimica teorica è con la pratica dell'agricoltura, ecc.

Le obbiezioni fatte allo studio dell'economia matematica non hanno maggiore nè minor valore di quelle che sono già state sollevate contro lo studio della meccanica razionale, della termodinamica e di altre scienze analoghe.

Lasceremo ora interamente da parte l'esame dei casi concreti e ci occuperemo esclusivamente dello studio matematico di alcuni casi teorici.

---

(1) Non possiamo qui diffonderci su questo argomento importantissimo dal punto di vista della economia. Lo si trova studiato in V. PARETO, *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333).

(2) Cfr. nota 1, pag. 380.

DETERMINAZIONE DELL'EQUILIBRIO ECONOMICO

31. *Scambio. Libera concorrenza e prezzi costanti* (1). — È questo un tipo molto importante di fenomeno economico; lo studio di esso può anche essere inteso come lo studio del problema della distribuzione di determinate quantità di merci fra i membri di una collettività.

Indichiamo con:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \theta + 1$$

gli individui, e mettiamo queste cifre come indici alle quantità ed alle funzioni riferentisi agli individui stessi. I prezzi di m merci X, Y, Z,... saranno:

$$1,\ p_y,\ p_z,\ \ldots$$

Per determinare l'equilibrio abbiamo le equazioni seguenti:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \varphi_{1x} = \dfrac{1}{p_y}\,\varphi_{1y} = \dfrac{1}{p_z}\,\varphi_{1z} = \ldots, \\ \varphi_{2x} = \dfrac{1}{p_y}\,\varphi_{2y} = \dfrac{1}{p_z}\,\varphi_{2z} = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{\theta x} = \dfrac{1}{p_y}\,\varphi_{\theta y} = \dfrac{1}{p_z}\,\varphi_{\theta x} = \ldots \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} x_1 - x_{1,0} + p_y\,(y_1 - y_{1,0}) + p_z\,(z_1 - z_{1,0}) + \ldots = 0, \\ x_2 - x_{2,0} + p_y\,(y_2 - y_{2,0}) + p_z\,(z_2 - z_{2,0}) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_\theta - x_{\theta,0} + p_y\,(y_\theta - y_{\theta,0}) + p_z\,(z_\theta - z_{\theta,0}) + \ldots = 0, \end{cases}$$

$$\text{(C)}\quad \begin{cases} x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0} + \ldots = 0, \\ y_1 - y_{1,0} + y_2 - y_{2,0} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si osserverà che nel sistema (B) non è scritta l'equazione corrispondente all'indice $\theta + 1$, perchè essa è conseguenza delle altre equazioni (B) e delle equazioni (C). Se si volesse scrivere questa equazione bisognerebbe sopprimerne un'altra.

I sistemi (A), (B), (C) hanno un significato economico. Il sistema (A) indica che, dati i vincoli, i gusti degli individui sono soddisfatti, e che questi si sono arrestati su una varietà di indifferenza. Il sistema (B) rappresenta i bilanci degli individui. Esso appartiene ai vincoli del primo genere. Il fatto che p_y, p_z, ... sono costanti, va messo in rapporto coi vincoli del secondo

(1) È il solo caso studiato da L. WALRAS.

genere. Il sistema (C) fa parte dei vincoli del primo genere; esso indica che le quantità totali di merci rimangono costanti.

Le incognite, cioè:

1° gli $m - 1$ prezzi;

2° le $m\theta + m$ quantità $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2, \ldots$

sono dunque in tutto $m\theta + 2m - 1$.

Le equazioni sono:

1° le $(m - 1)(\theta + 1)$ equazioni (A);

2° le θ equazioni (B);

3° le m equazioni (C);

in tutto $m\theta + 2m - 1$. Il numero delle equazioni è dunque eguale a quello delle incognite e il problema è determinato.

Le difficoltà matematiche del problema dipendono dal gran numero delle equazioni fra le quali occorre effettuare eliminazioni complicate (1). Ma, senza procedere alla eliminazione, si possono ottenere alcuni teoremi riguardanti le quantità e i prezzi.

32. *Leggi generali dell'offerta e della domanda* (2). — Consideriamo un individuo qualsiasi; le equazioni (A) e (B) ci daranno per lui:

$$\varphi_x = \frac{1}{p_y}\ \varphi_y = \frac{1}{p_z}\ \varphi_z = \ldots,$$

$$(x - x_0) + p_y(y - y_0) + \ldots = 0.$$

Poniamo $\varphi_x = m$; m è allora l'indice elementare della merce il cui prezzo è l'unità, cioè la moneta. Sia R l'hessiano:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \cdots \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \cdots \\ \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

---

(1) Per evitare queste difficoltà, la maggior parte degli autori che si occupano di queste questioni, hanno la tendenza spiccata a considerare soltanto lo scambio di due merci. Questo caso semplicissimo presenta inoltre il vantaggio di poter essere rappresentato con curve e diagrammi: l'intuizione visuale supplisce allo studio analitico. Ciò può essere utile anche dal punto di vista didattico. E può essere utile dal punto di vista teorico, per cercare di indovinare la via che potrà essere seguita nei casi più complicati. Ma presto o tardi bisogna venire anche allo studio dei casi, con un numero qualunque di variabili, perchè questi soli si avvicinano alla realtà.

Irving Fisher, *Mathematical Investigation in the Theory of Value and Prices* [«Transactions Connecticut Academy», 9 (1892), luglio] è entrato largamente in questa via fin dal 1892.

(2) V. Pareto, *Man. d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 579 e seguenti.

La maggior parte degli autori considerano esclusivamente lo scambio fra due merci. Non si possono ottenere così le leggi generali dell'offerta e della domanda, e si giunge spesso a risultati erronei.

Sostituiamo ordinatamente 1, p_y, p_z ... agli elementi della prima, della seconda, della terza ..., colonna del determinante, e indichiamo con R_1, R_2, R_3, ... i determinanti ottenuti con queste sostituzioni. Sia inoltre H_{in} il minore che si ottiene sopprimendo in R la i^{ma} riga e la n^{ma} colonna, preso col segno che ad esso compete nello sviluppo di R, in modo che si abbia:

$$R = \varphi_{xx} H_{1,1} + \varphi_{xy} H_{2,1} + \varphi_{xz} H_{3,1} + \dots$$

Formiamo il determinante:

$$\mathrm{M} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & p_y & p_z & \dots \\ 1 & \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \dots \\ p_y & \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \dots \\ p_z & \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

e, come prima, indichiamo con $M_{i,n}$ i suoi minori, presi ciascuno col segno che ad esso compete, sicchè si abbia:

$$M = M_{2,1} + p_y M_{3,1} + p_z M_{4,1} + \dots$$

Poniamo ancora:

$$T = \frac{M}{R}.$$

Avremo così (1):

[35]
$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial p_y} = - \dfrac{y - y_o + m \dfrac{M_{3,1}}{R}}{T} \\ \dfrac{\partial y}{\partial p_y} = \dfrac{- (y - y_o) + m \dfrac{H_{2,2}}{R_2} \left(T - \dfrac{M_{3,1} R_2}{H_{2,2} R} \right)}{T} \dfrac{R_2}{R}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial p_y} = \dfrac{- (y - y_o) + m \dfrac{H_{2,3}}{R_3} \left(T - \dfrac{M_{3,1} R_3}{H_{2,3} R} \right)}{T} \dfrac{R_3}{R} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ M_{3,1} = R_2 \end{cases}$$

(1) Queste formule e le seguenti sono state date da V. Pareto, « Giornale degli Economisti » (Roma) 1892, pag. 119-157; *ibid.*, 1893, pag. 279-321.

33. *Consumi indipendenti.* — Se i consumi sono indipendenti,

$$\varphi_{xy} = 0, \qquad \varphi_{xz} = 0, \qquad \ldots$$

e si ha:

[36]
$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial p_y} = -\dfrac{y - y_o + m\dfrac{p_y}{\varphi_{yy}}}{T}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial p_y} = \dfrac{-(y - y_o)\,p_y + m\left(T - \dfrac{p_y^2}{\varphi_{yy}}\right)}{T\varphi_{yy}}, \\ \dfrac{\partial z}{p_y} = \dfrac{\partial m}{\partial p_y}\dfrac{p_z}{\varphi_{zz}}. \end{cases}$$

E inoltre:

[37]
$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_y (y - y_o)}{\partial p_y} = -\dfrac{\partial m}{\partial p_y}\left(T - \dfrac{p_y^2}{\varphi_{yy}}\right), \\ T = \dfrac{1}{\varphi_{xx}} + \dfrac{p_y^2}{\varphi_{yy}} + \dfrac{p_z^2}{\varphi_{zz}} + \ldots \end{cases}$$

34. *Variazioni dell'offerta e della domanda.* — Dalle formule che precedono si traggono le seguenti conclusioni:

1° se la merce Y è domandata, si ha sempre:

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} < 0.$$

La domanda diminuisce quando il prezzo aumenta.

Quanto a $\dfrac{\partial m}{\partial p_y}$, possono presentarsi tre casi:

α) l'individuo riduce la sua spesa per acquisti di Y. L'indice di ofelimità della moneta decresce;

β) la spesa stessa rimane invariata. L'indice di ofelimità della moneta non varia;

γ) la spesa aumenta. L'indice di ofelimità della moneta cresce.

2° Se la merce Y è offerta, non si può trarre nessuna conclusione dal segno di $\dfrac{\partial y}{\partial p_y}$; questa quantità può crescere e decrescere passando per lo zero. Si ha sempre:

$$\frac{\partial m}{\partial p_y} < 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial p_y} > 0, \qquad \ldots$$

35. *Consumi dipendenti.* — Supponiamo ora che i consumi delle due merci Y, Z siano dipendenti, mentre quelli delle altre merci rimangono indipendenti.

Si avrà:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & 0 \\ 0 & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{uu} \end{vmatrix}$$

Le equazioni [35] diventeranno:

$$\frac{\partial m}{\partial p_y} = - \frac{y - y_0 + m \dfrac{p_y}{\varphi_{yy} k} l}{T \varphi_{xx}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = \frac{- (y - y_0)\, p_y\, l + m \left(\dfrac{1}{\varphi_{xx}} + \dfrac{p_z^2}{\varphi_{zz}} + \dfrac{p_u}{\varphi_{uu}} \right)}{T \varphi_{yy} k},$$

$$\frac{\partial z}{\partial p_y} = \frac{- (y - y_0)\, p_z\, h - m \left(\dfrac{\varphi_{yz}}{\varphi_{yy}} \left| \dfrac{1}{\varphi_{xx}} + \dfrac{p_u^2}{\varphi_{uu}} \right| + \dfrac{p_y p_z}{\varphi_{yy}} \right)}{T \varphi_{zz} k}$$

$$k = 1 - \frac{\varphi_{yz}^2}{\varphi_{yy} \varphi_{zz}}, \qquad h = 1 - \frac{p_y}{p_z} \frac{\varphi_{yz}}{\varphi_{yy}}, \qquad l = 1 - \frac{p_z}{p_y} \frac{\varphi_{yz}}{\varphi_{zz}},$$

$$T = \frac{1}{\varphi_{xx}} + \frac{p_y^2}{\varphi_{yy} k} - 2 p_y\, p_z \frac{\varphi_{yz}}{\varphi_{yy} \varphi_{zz} k} + \frac{p_z^2}{\varphi_{zz} k} + \frac{p_u^2}{\varphi_{uu}}.$$

Per una dipendenza del primo genere:

$$\varphi_{yz} > 0;$$

allora h, l sono quantità positive, e se anche k è positiva le conclusioni a cui si giunge sono le stesse che per le merci a consumi indipendenti.

Nel caso di una dipendenza del secondo genere,

$$\varphi_{yz} < 0,$$

e si può avere $l < 0$, o $h < 0$; le conclusioni cambiano. Occorre innanzi tutto osservare che $\dfrac{\partial y}{\partial p_y}$ può crescere con p_y quando Y è domandata. Questa conclusione teorica è in accordo con casi osservati nella pratica (1).

---

(1) V. PARETO, *Cours d'économie politique* (v. nota 1, pag. 337), 2, pag. 338 (n. 977).

36. *Consumo di un gran numero di merci.* — Supponiamo di avere un gran numero di merci i cui consumi siano indipendenti. La quantità T può essere molto grande in valore assoluto senza che nessuno dei suoi termini lo sia. Si potrebbe essere tentati di supporre $T = +\infty$ e di considerare, almeno approssimativamente, l'indice di ofelimità della moneta come costante, nel qual caso le formule [35] darebbero $\frac{\partial m}{\partial p_y} = 0$. Questa ipotesi presenta il grande vantaggio di permettere di considerare separatamente le variazioni delle offerte e delle domande delle singole merci, poichè le formule [35] dànno:

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = \frac{m}{\varphi_{yy}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial p_y} = 0, \quad \ldots$$

È comprensibile come tale ipotesi abbia sedotto gli economisti che non volevano prendersi la briga di considerare l'equilibrio economico in tutta la sua generalità. Disgraziatamente, l'ipotesi stessa conduce, almeno in generale, a risultati erronei ed inaccettabili, e quindi deve essere scartata (1).

37. *Scambio. Prezzi variabili e differenti.* — Supponiamo che i venditori di Y si accordino fra loro per stabilire prezzi differenti a seconda della quantità acquistata da ciascun cliente. Abbiamo qui un tipo di fenomeno economico non compreso in quelli considerati al n. 11, in quanto le persone che hanno il potere di fissare i prezzi non li determinano in base alla condizione di ottenere un massimo di profitto in numerario o in ofelimità.

Siano:

$$p_{1y}, \; p_{2y}, \; \ldots$$

i prezzi ai quali la merce Y è venduta agli individui:

$$1, \; 2, \; \ldots, \; \theta + 1.$$

Al punto di equilibrio questi prezzi diventeranno:

$$p^0_{1y}, \; p^0_{2y}, \; \ldots$$

In generale contrassegneremo con un indice 0 in alto le quantità che si riferiscono al punto di equilibrio.

Supponiamo che la merce Y sia venduta da un individuo per il quale essa non è ofelima. Le quantità relative a questo individuo saranno indicate con lettere sprovviste di indice in basso. Egli offre tutta la quantità y_0 che possiede.

---

(1) V. PARETO ha insistito su questo punto in «Giornale degli Economisti» (Roma), 1895, pag. 476-478; nel suo *Cours d'économie politique* (v. nota 1, pag. 337), 1, pag. 36 (n. 84); nel suo *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333), pag. 625.

Le equazioni dell'equilibrio sono le seguenti:

$$(A)\quad \begin{cases} \varphi_x = \dfrac{1}{p_z^0}\ \varphi_z = \dfrac{1}{p_u^0}\ \varphi_u = \ldots, \\ \varphi_{1x} = \dfrac{1}{p_{1y}^0}\ \varphi_{1y} = \dfrac{1}{p_z^0}\ \varphi_{1z} = \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} x_0 - x^0 + \int_0^{y_1^0} p_{1,y}\, dy_1 + \int_0^{y_2^0} p_{2,y}\, dy_2 - \ldots + p_z^0\,(z_0 - z^0) + \ldots = 0, \\ x_{1,0} - x_1^0 - \int_0^{y_1^0} p_{1,y}\, dy_1 + p_z^0\,(z_{1,0} - z_1^0) + \ldots = 0, \\ x_{2,0} - x_2^0 - \int_0^{y_2^0} p_{2,y}\, dy_2 + p_z^0\,(z_{2,0} - z_2^0) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(C)\quad \begin{cases} x^0 - x_0 + x_1^0 - x_{1,0} + x_2^0 - x_{2,0} + \ldots = 0, \\ -y_0 + y_1^0 + y_2^0 + \ldots = 0, \\ z^0 - z_0 + z_1^0 - z_{1,0} + z_2^0 - z_{2,0} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

38. *Scambio. Prezzi costanti. Monopolio di un individuo e di una merce.* — Poichè l'individuo che ha il monopolio della merce Y non tien conto dell'indice di ofelimità di essa, vi è nel sistema (A) del n. 31 una equazione di meno; quella in φ_{1y}. Si possono determinare tutte le incognite in funzione di una di esse, per esempio p_y e, essendo il monopolio detenuto dall'individuo 1, si avrà:

$$y_{1,0} - y_1 = f(p_y).$$

α) Se l'individuo che ha il monopolio si propone di trarne la massima possibile somma di denaro, si dovrà porre:

$$\frac{d(p_y f)}{dp_y} = 0.$$

Questa equazione sostituisce quella che manca nel sistema (A) ed il problema è determinato.

β) Se l'individuo che ha il monopolio si propone di trarne il massimo di ofelimità, bisogna porre, in luogo dell'equazione precedente:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_y} = 0,$$

cioè:

$$\varphi_{1,x}\frac{dx_1}{dp_y} + \varphi_{1,y}\frac{dy_1}{dp_y} + \varphi_{1,z}\frac{dz_1}{dp_z} + \ldots = 0$$

e il problema è ancora determinato.

39. *Monopolio di due individui e di una merce* (1). — Gli individui siano 1 e 2 e la merce sia Y.

Sia nell'ipotesi che essi tendano ad ottenere il massimo di guadagno in numerario, sia in quella che essi tendano ad ottenere il massimo di ofelimità, il numero di equazioni risulta superiore al numero delle incognite da determinare, oppure si giunge ad equazioni che, in generale, sono incompatibili (2). Se ne conclude che l'ipotesi fatta è inammissibile e che due individui aventi il monopolio di una medesima merce non possono effettivamente agire in conformità del tipo (II) dei fenomeni economici.

40. *Monopolio di due individui e di due merci.* — Ponendo per gli individui aventi il monopolio la condizione di un massimo di guadagno in numerario, o quella di un massimo di ofelimità, avremo un numero di equazioni eguale al numero delle incognite; le equazioni, in generale, non saranno incompatibili. Il problema è dunque determinato e l'ipotesi fatta è ammissibile.

Sarebbe utile studiare altri tipi di scambio, e naturalmente dovrebbero essere scelti quelli che più o meno corrispondono a casi reali. I progressi della scienza economica dipendono da studi di questo genere.

Il caso del tipo (III) dei fenomeni economici, indicato al n. 27, sarà esaminato più avanti.

41. *Produzione.* — Abbiamo nella produzione due fenomeni economici che si saldano insieme e che dobbiamo considerare:

1° l'equilibrio dei consumatori e dei fornitori delle imprese;
2° l'equilibrio delle imprese.

Il primo equilibrio è già stato determinato: è quello dello scambio; soltanto, qui le quantità delle merci non restano costanti; variano in conseguenza delle trasformazioni operate dalla produzione; la connessione fra i due fenomeni è costituita appunto dalla determinazione di queste quantità.

Se poniamo:

$$x_{1,0} + x_{2,0} + \ldots = X_0, \qquad y_{1,0} + y_{2,0} + \ldots = Y_0, \quad \ldots$$

---

(1) F. Y. Edgeworth [«Giornale degli Economisti» (Roma), 1897, pag. 13-31] ha trattato per primo, facendo talune ipotesi, un caso particolare di questo problema.

(2) La dimostrazione si trova in V. Pareto, *Manuel d'économie politique* (vedi nota 1, pag. 333), pag. 595 e seguenti.

Soltanto l'economia matematica ha permesso, finora, di trattare questi problemi che gli economisti classici non comprendono neppure.

le equazioni, relative allo scambio, del sistema (C) del n. 31 possono scriversi:

$$[38] \qquad x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = X_0, \qquad y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = Y_0, \quad \ldots$$

e le quantità X_0, Y_0, sono date e costanti. Questo carattere di costanza rappresenta uno dei vincoli dello scambio.

Nel caso della produzione, le quantità costanti X_0, Y_0,... delle equazioni [38] saranno sostituite con quantità variabili X, Y, Z, ..., e il sistema (C) diventerà:

$$(C_1) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = X \\ y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = Y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

42. *Notazioni.* — Ciò detto, occorre occuparsi dell'equilibrio delle imprese, o — in altri termini — delle trasformazioni della produzione.

Si è costretti a considerare un gran numero di quantità, il che complica le notazioni; appare quindi opportuno riassumerle.

A, B, C, ..., beni economici o servizi di capitali, che sono trasformati in X, Y, Z, ...

$0 + 1$, numero degli individui.

n, numero dei beni A, B, C, ...

m, numero dei beni X, Y, Z, ...

Pei consumatori, che nello stesso tempo sono fornitori dell'impresa pei beni A, B, ...:

$$x_1, y_1, \ldots, \quad x_2, y_2, \ldots, \quad a_1, b_1, \ldots, \quad a_2, b_2, \ldots,$$

indicano le quantità consumate fino ad una posizione intermedia. Per semplicità, si suppone che le quantità iniziali delle merci X, Y, ... siano nulle; le quantità iniziali di A, B, ... saranno indicate con $a_{1,0}$, $b_{1,0}$, ..., $a_{2,0}$, $b_{2,0}$, ..., e si designeranno con:

p_x, p_y, ..., p_a, p_b, ..., i prezzi;

X, Y, ..., A, B, ..., indicheranno le quantità totali consumate fino ad una posizione intermedia.

Per una impresa che trasformi A, B, ... in X, Y, ..., e per una posizione intermedia, si designeranno con:

a, b, ..., le quantità ricevute,

A', B', ... le quantità trasformate,

x, y ..., le quantità prodotte,

π_x, π_y ..., i prezzi di costo delle merci,

Π_x, Π_y ..., i costi totali delle produzioni di x, y, ...,

$\Pi_{o,x}$, $\Pi_{o,y}$ ..., le somme totali che occorre spendere prima di iniziare la produzione,

P_x, P_y, ... le somme totali che si ricavano dalla vendita di x, y, ...

A'_o, B'_o, ... le quantità di merci di cui è necessario disporre prima di iniziare la produzione,

$A'_{o,x}$, $B'_{o,x}$, ... $A'_{o,y}$, $B'_{o,y}$, ... queste medesime quantità iniziali, rispettivamente afferenti alla produzione di X, Y, ...

Contrassegneremo le quantità, i prezzi, ecc. relativi alla posizione di equilibrio, con degli indici 0 posti in alto. Tuttavia, quando non si abbiano a temere equivoci, ometteremo questi indici che sovraccaricherebbero inutilmente le formule.

In base a queste definizioni avremo:

$$[39]\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots = X, & a_1 + a_2 + \ldots = A, \\ y_1 + y_2 + \ldots = Y, & b_1 + b_2 + \ldots = B, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_1^0 + x_2^0 + \ldots = X^0, & a_1^0 + a_2^0 + \ldots = A^0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1,0} + a_{2,0} + \ldots = A_0, & b_{1,0} + b_{2,0} + \ldots = B_0, \end{cases}$$

$$[40]\quad a^0 = A_0 - A^0, \qquad b^0 = B_0 - B^0, \ldots$$

$$[41]\quad \begin{cases} A'_0 = A'_{0x} + A'_{0y} + \ldots, \\ B'_0 = B'_{0x} + B'_{0y} + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

43. *I vincoli.* — I vincoli del primo genere stabiliscono dei rapporti fra le quantità trasformate e le quantità prodotte. La catena delle trasformazioni può essere più o meno lunga. Si possono trasformare talune cose in altre, che serviranno a produrne altre ancora, e così di seguito, fino alle ultime cose ottenute, che sono direttamente ofelime per i consumatori. I primi anelli della catena si indicano spesso col nome di *capitalizzazione*, e si riserva all'ultimo il nome di *produzione*. È bene inteso che col termine *cose* si indicano non soltanto degli oggetti materiali, ma anche l'uso di determinate cose (servizi dei capitali).

Le condizioni tecniche della produzione ci faranno conoscere le quantità A', B',... in funzione di x, y,..., cioè:

$$[42]\quad A' = A'_0 + F_a(x, y, \ldots), \qquad B' = B'_0 + F_b(x, y, \ldots), \ \ldots$$

I coefficienti di produzione sono:

$$[43]\quad a_x = \frac{\partial F_a}{\partial x}, \qquad b_x = \frac{\partial F_b}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad a_y = \frac{\partial F_a}{\partial y}, \qquad \ldots$$

Ammettendo l'esistenza delle funzioni integrali F_a, F_b,... si ammette implicitamente che le quantità A', B',..., impiegate per le produzioni, non dipendono dalla via seguita per giungere al punto che si considera. Questo

è in realtà il caso più generale. Si potrebbe partire dalla considerazione delle quantità [43] e si avrebbero allora dei cicli chiusi e dei cicli aperti.

La considerazione dei vincoli del secondo genere condurrebbe anch'essa a dei cicli. È questo un argomento interessante, ma non ci fermeremo su di esso, perchè finora è stato poco o punto studiato.

I coefficienti di fabbricazione possono oppur no, essere funzioni delle quantità x, y, ..., delle quantità totali prodotte da ciascuna impresa; possono essere costanti o variabili. In generale, alcuni fra essi sono costanti, altri variabili. Sia dato un gruppo di k coefficienti variabili b_y, c_y, ... e_y; essi saranno legati dall'equazione:

$$[44] \qquad f(b_y,\ c_y,\ \ldots,\ e_y) = 0$$

e l'impresa dovrà determinarli.

44. *I costi di produzione.* — Sia X una merce, la produzione della quale sia indipendente da quella delle altre; il costo di produzione di dx sarà:

$$[45] \qquad \pi_x\, dx = p_a\, a_x\, dx + p_b\, b_x\, dx + \ldots$$

Per avere il costo di produzione della quantità x bisognerà integrare questa espressione e aggiungere le quantità iniziali $A'_{0,x}$, $B'_{0,x}$,... afferenti alla produzione di X.

Se vi è un gruppo di produzioni dipendenti, ad esempio, quelle di X, Y, Z, si potrà avere soltanto il costo di produzione del gruppo.

Per le produzioni indipendenti supporremo in generale, che a_x, b_x,... dipendano soltanto da x, ecc. In questo caso si avrà:

$$[46] \qquad \begin{aligned} \Pi_x &= \Pi_{0,x} + \int_0^x \pi_x\, dx, & \Pi_y &= \Pi_{0,y} + \int_0^y \pi_y\, dy, \ \ldots \\ \Pi_x^0 &= \Pi_{0,x} + \int_0^{x^0} \pi_x\, dx, & \Pi_y^0 &= \Pi_{0,y} + \int_0^{y^0} \pi_y\, dy, \ \ldots \end{aligned}$$

I costi di produzione non sono dati *a priori* e sono funzioni incognite. Questa osservazione così semplice sfugge generalmente agli economisti classici.

45. *I tipi.* — Come abbiamo visto al n. 27, se la produzione di X è fatta rigorosamente secondo il tipo (I) dei fenomeni economici, si deve avere (1):

$$[47] \qquad \mathrm{P}_x^0 = \Pi_x^0, \qquad p_x^0 = \pi_x^0.$$

Ma può darsi che queste due equazioni siano incompatibili.

In realtà, nel caso della libera concorrenza, si deve avere:

$$[48] \qquad \mathrm{P}_x^0 \geqslant \Pi_x^0, \qquad p_x^0 \geqslant \pi_x^0.$$

---

(1) A torto, quando si studia il caso della libera concorrenza, si tien conto, in generale, soltanto della prima di queste equazioni.

Nel caso in cui è possibile l'eguaglianza, si hanno le equazioni [47]. Quando essa è impossibile, si hanno i due casi seguenti:

$$[\alpha] \qquad P_x^0 > \Pi_x^0, \qquad p_x^0 = \pi_x^0,$$

$$[\beta] \qquad P_x^0 = \Pi_x^0, \qquad p_x^0 > \pi_x^0.$$

Essi sono in rapporto col fenomeno della *rendita*. Lo studio ne è molto interessante, ma non possiamo farlo qui (1).

L'impresa si sforza di rendere minimo il costo di produzione Π_y della merce Y che produce. Poichè l'equazione [44] lega le k quantità b_y, c_y,... e_y, $k-1$ di queste possono essere assunte come variabili indipendenti, e la condizione di minimo di Π_y sarà espressa da:

$$[49] \qquad \frac{\partial \Pi_y^0}{\partial b_y}\frac{\partial b_y}{\partial c_y} + \frac{\partial \Pi_y^0}{\partial c_y} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Pi_y^0}{\partial b_y}\frac{\partial b_y}{\partial e_y} + \frac{\partial \Pi_y^0}{\partial e_y} = 0.$$

Se l'impresa agisce in conformità del tipo (I) dei fenomeni economici, operando la derivazione si deve supporre che siano costanti i prezzi o i parametri che entrano nelle espressioni dei prezzi.

Si elimineranno le $\frac{\partial b_y}{\partial c_y}$, ... mediante le equazioni ottenute derivando la [44], e si avranno così $k-1$ equazioni che, insieme con la [44] stessa, ci daranno le k equazioni necessarie per la determinazione delle k incognite b_y, c_y, ... e_y.

Quando l'impresa agisce in conformità del tipo (II) dei fenomeni economici, essa si sforza di rendere massima la differenza $P_x - \Pi_x$, tanto a mezzo dell'azione che può esercitare sui prezzi, quanto a mezzo di quella che può esercitare sui coefficienti di fabbricazione.

Nel caso in cui un solo individuo ha il monopolio, si può considerare anche un massimo di ofelimità; ma in realtà questo caso si presenta assai raramente. È tuttavia utile studiarlo per stabilire le differenze che presenta col caso precedente, nel quale i conti si fanno in numerario.

46. *Equilibrio della produzione nel caso più semplice* (2). — Supponiamo che i prezzi siano costanti; che i coefficienti di fabbricazione siano costanti; che manchino le spese indipendenti dalle quantità; cioè:

$$\Pi_{0,x} = 0, \qquad \Pi_{0,y} = 0, \ldots$$

---

(1) Gli sviluppi si trovano in V. PARETO, *Manuel d'économie politique* (v. nota 1, pag. 333); ma restano ancora molti punti da studiare.

(2) È l'unico caso che L. WALRAS abbia studiato. Egli ha avuto ragione di incominciare dai casi più semplici; ma occorre poi occuparsi dei casi più complicati.

Ciò che sopratutto allontana questo caso dalla realtà è la condizione:

$$\Pi_{o,x} = 0, \qquad \Pi_{o,y} = 0, \ \ldots$$

e quella della costanza dei coefficienti di fabbricazione.

Il tipo del fenomeno economico è quello della libera concorrenza, che può essere rigorosamente realizzato, le equazioni [47] non essendo incompatibili.

Abbiamo innanzi tutto i sistemi (A), (B) del n. 31, e il sistema (C_1) del n. 41. Abbiamo poi:

$$[E] \quad \begin{cases} a^0 = a_x\, x^0 + a_y\, y^0 + \ldots, \\ b^0 = b_x\, x^0 + b_y\, y^0 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$[D] \quad \begin{cases} p_x = a_x\, p_a + b_x\, p_b + \ldots, \\ p_y = a_y\, p_a + b_y\, p_b + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si dimostra che il numero delle incognite è eguale al numero delle equazioni e il problema è determinato.

47. *Capitalizzazione.* — Supponiamo che vi sia un elemento nuovo T (il capitale) che non è ofelimo direttamente, ma serve a fabbricare delle merci:

$$X,\ Y,\ Z,\ \ldots$$

Nelle equazioni [D] vi saranno dei termini nuovi:

$$t_x\, p_t, \quad t_y\, p_t, \quad \ldots$$

Abbiamo due incognite di più, cioè la quantità niziale t^0 di T e il prezzo p_t; ma abbiamo anche due equazioni di più, cioè:

$$t^0 = t_x\, x^0 + t_y\, y^0 + \ldots$$
$$p_t = a_t\, p_a + b_t\, p_b + \ldots$$

Il problema continua dunque ad essere determinato, mentre si allunga la catena delle trasformazioni successive (capitalizzazione).

Va osservato che una nuova quantità di T può essere ottenuta a mezzo di un'altra quantità già esistente, il che fa sì che si possano avere dei termini $t_t\, p_t$.

48. *La capitalizzazione sotto diversi punti di vista.* — Dal punto di vista strettamente matematico della determinazione dell'equilibrio, la capitalizzazione non differisce dunque dalla fabbricazione di cose qualunque. La questione si presenta diversamente dal punto di vista dell'economia applicata che deve studiare a lungo questo argomento estremamente complesso.

È molto importante rendersi ben conto della natura di questo studio, ed a tal fine incominceremo col servirci di una similitudine. L'agrimensura può presentare tre specie di proposizioni:

α) Dato un campo avente la forma di un trapezio, quale ne è la superficie? È una proposizione di geometria pura.

β) In un dato Comune, tutti o quasi tutti i campi hanno la forma di trapezi con determinate dimensioni. È una proposizione che deriva dalla osservazione.

γ) Nello stesso Comune i campi hanno delle superficie che risultano dalle dimensioni che per essi sono state trovate. È una proposizione sintetica che discende dalle proposizioni (α) e (β).

Ora, lo studio dell'economia ci presenta le proposizioni seguenti:

α) Essendo dati le funzioni indici e i vincoli, quali sono i punti di equilibrio? È una proposizione di economia pura, ed è di questioni di questo genere che ci siamo occupati finora (1).

β) In una data società, certe funzioni indici hanno una forma che risulta dall'osservazione; lo stesso accade per certi vincoli, ecc. È una proposizione descrittiva.

---

(1) Di ciò non ha tenuto conto J. BERTRAND (v. nota 2, pag. 347). Le sue obbiezioni a L. WALRAS sono sotto più aspetti difettose. Alla determinazione dell'equilibrio economico egli obbietta, pag. 301: « Supposons que d'après les intentions connues des acheteurs et des vendeurs, le cours d'équilibre calculé une heure avant l'ouverture du marché... soit 25 francs l'héctolitre. Un nouvel acheteur se présente; au dessous de 25 francs, il veut acheter sans limite, et ne rien prendre ni à ce cours ni *a fortiori* au dessus. Sa présence, si l'on en croit la règle de L. WALRAS, n'exercerait aucune influence; elle relève en effet jusqu'à l'infini la courbe de demande pour les points dont l'abscisse est inférieure à 25, sans la changer en rien pour les autres; l'intersection dont on a fait dépendre le résultat restera la même et correspondra toujours à l'abscisse 25. Peut-on admettre une telle conclusion? Le cours de 25 francs, en supposant qu'il tende à s'établir, ne sera ni le seul ni le premier; les prix oscilleront autour de lui; chaque fois qu'ils lui seront inférieurs, l'acheteur nouveau se présentera, etc. ».

Si tratta di un problema teorico soggetto a determinate condizioni, e il nostro autore prospetta un problema pratico con altre condizioni; si tratta di un problema di statica e il nostro autore prospetta un problema di dinamica.

Le obbiezioni di J. BERTRAND si applicano parola per parola alla determinazione dell'equilibrio meccanico. Un punto materiale è posto su un piano; sono applicate ad esso delle forze, la risultante delle quali, normale al piano, preme il punto contro il piano stesso. La statica ci dice che esso resterà in equilibrio. Non è vero — risponderemo con J. BERTRAND. — Supponiamo che sia stato praticato un taglio nel piano a una distanza piccolissima dal punto (è l'acquirente che acquista senza limite al disotto del prezzo di 25 franchi, e non compera al disopra). L'equilibrio del punto non si stabilirà immediatamente; il punto oscillerà intorno alla posizione di equilibrio, e quando arriverà al taglio (quando i prezzi saranno inferiori a 25 franchi) abbandonerà il piano, e l'equilibrio sul piano non avrà più luogo.

Ciò che vi è di vero nelle osservazioni di J. BERTRAND, tanto per l'economia pura quanto per la meccanica razionale, è che non si possono trasportare *ipso facto* ai casi pratici i risultati di queste teorie.

Abbiamo citato *in extenso* l'opinione di J. BERTRAND perchè essa è l'esempio tipico di un gran numero di obbiezioni simili che sono state fatte alle teorie della economia pura.

γ) Nella stessa società, l'equilibrio ha luogo in determinate circostanze che sono una conseguenza di (α) e di β). È questa una proposizione sintetica che risulta da (α) e da (β).

Si potrebbero fare dei tentativi per dedurre, in determinate circostanze, l'ofelimità degli alimenti, dalla loro composizione chimica combinata col loro grado di assimilabilità; ma questa via non sembra condurre a risultati molto interessanti.

Diversamente accade per un tentativo simile fatto per trovare la funzione indice del risparmio che è prestato e restituito (1). Vi sono dei caratteri che si presentano in quasi tutti gli uomini in modo presso a poco uniforme. Gli studi di economia scientifica sulla capitalizzazione e l'interesse sono in realtà studi miranti a scoprire certe funzioni indici.

Si è tentata una via che sembra molto semplice. L'ofelimità del risparmio si confonderebbe con l'interesse che se ne ricava; la produzione di esso sarebbe funzione di questo interesse. Questa teoria non rappresenta bene i fatti.

La funzione indice del risparmio dipende da una infinità di circostanze A, B, C,... Fra queste ve ne sono tre che in molti casi determinano la parte principale del fenomeno, e sono:

1° la durata del prestito;

2° il premio di assicurazione per la eventualità che la cosa venga a perire per un caso fortuito;

3° il premio di ammortamento per far fronte a un deperimento normale.

(1) Oltre il libro classico di E. von Böhm Bawerk (*Positive Theorie des Kapitals*, Innsbruck, 1900), bisogna consultare gli importantissimi lavori di Irving Fisher (*The Nature of Capital and Income*, New York 1906; *The Rate of Interest, its Nature, Determination and Relation to Economic Phenomena*, New York 1907).